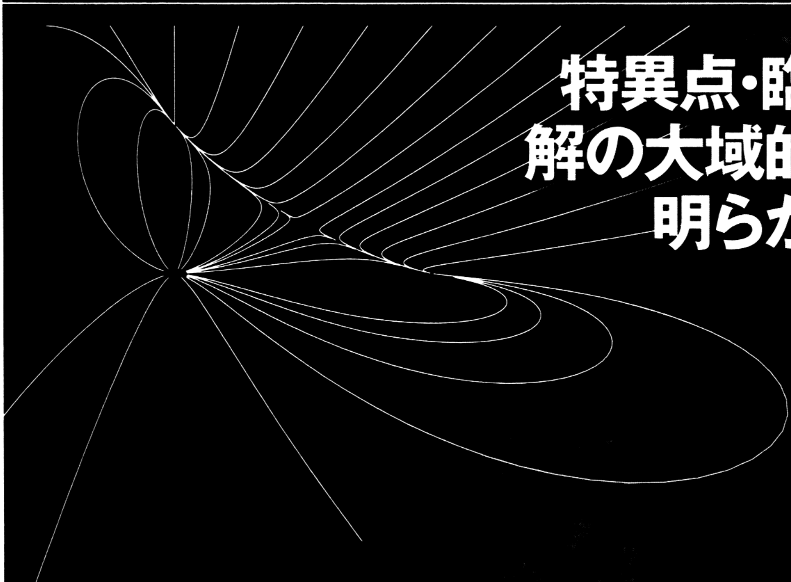
常微分方程式の局所漸近解析



特異点・臨界点が
解の大域的性質を
明らかにする

柴田正和 著
SHIBATA MASAKAZU

森北出版株式会社

はじめに

ライプニッツ (Leibniz) が初めて $\int y dy = y^2/2$ という式を書き下した 1675 年 11 月 11 日が，積分すなわち微分方程式を解くという手続きの誕生日だとされている [6]．その後ほんの 100 年ほどの間に，ベルヌイ (Bernoulli) 兄弟やリカッティ (Riccati) らにより厳密解を得ることのできるめぼしい微分方程式は調べ尽くされてしまった．特に線形常微分方程式の理論は，その特異点に関する理論まで含め，19 世紀半ばまでにフクス (Fuchs) らにより確立された (第 2 章)．

線形微分方程式は初等的に取り扱いやすい対象であり，微分方程式の入門書のほとんどはこのレヴェルに留まっている．しかし，自然科学・社会科学の現象の中にあって入力と出力が比例する線形現象はあまりにも単純化されすぎており，現実味も乏しく面白みに欠ける．非線形現象こそ興味ある研究対象であり，それを記述する非線形常微分方程式は線形常微分方程式よりはるかに味わい深い．たとえば，非線形微分方程式の解の特異点は微分方程式の係数の特異点 (固定特異点) だけに留まらず，自然発生し (自然発生特異点)，初期 (境界) 条件に呼応して踊りだす (可動特異点，1-5 節)．また，非線形微分方程式においてはその一般解に含まれる積分定数をどのように選んでも得ることのできない解・特異解 (1-7 節および第 4 章) が現れる．

ところが，厳密解を有する非線形微分方程式はごくごくまれである．それだからこそ，微分方程式の厳密解は 18 世紀までにほぼすべて明らかになったのである．しかも，たまたま厳密解を得るという僥倖に恵まれたとしても，それが積分表示や媒介変数表示であった場合には，そのままでは解の定性的性質を推し量ることは難しい．それどころか，厳密解を特殊関数で表現できた場合ですら，解の定性的性質を理解することは必ずしも容易でない．以下，その例を順にみてゆこう．まず，独立変数 x をパラメータとする積分表示の解からその解の独立変数依存性を判断することは，きわめて困難である．そこで，積分を漸近級数展開する必要が生ずる．そのためのさまざまな手法を前著『漸近級数と特異摂動法』[5] 第 3 章で説明した．

次に媒介変数表示の解を見ることにしよう．2 階非線形常微分方程式

$$y'' - y' + f(y) = 0, \quad f(y) = \frac{9}{100}(y - y^{-5/3})$$

の一般解は媒介変数 t を介して

$$x = -\frac{5}{4}\log(t^4 - 6t^2 + 4C_1 t - 3) + C_2$$
$$y = (t^3 - 3t + C_1)^{3/2}(t^4 - 6t^2 + 4C_1 t - 3)^{-9/8} \quad (C_1, C_2：定数)$$

と表すことができる([5] 第 4 章)．しかし，この式からこの解曲線の形状ひいては解の性質を読み取ることはやはり絶望的である．

最後に，解を幸運にも特殊関数で表現できた場合であるが，そのときですら解の定性的性質を理解することは必ずしも容易でない．たとえば，微分方程式 (1-1 節)

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ax^2y = 0, \quad a > 0 \tag{1-1-24}$$

の一般解は，

$$y = \sqrt{x}\left[AJ_{1/4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}x^2\right) + BY_{1/4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}x^2\right)\right] \quad (A, B：定数) \tag{1-1-25}$$

であるが，関数論の専門家ではない一般の微分方程式「利用者」が，1/4 次のベッセル関数の振る舞いに精通していることは期待できないだろう．本書では，一貫して微分方程式論ないし関数論の専門家ではない読者を念頭に，微分方程式の「初等関数で表現された」高精度近似解を得ることをめざす．1-1 節でその最初の例として，微分方程式 (1-1-24) の $x \to +\infty$ における局所漸近解析を実施し，その解の $x \to +\infty$ における振る舞いを初等関数で表現する．

実際上の問題において遭遇する非線形微分方程式においては，上の例のようなごく限られた例外を除きその厳密解を得ることは期待できず，最終的に数値計算に頼らざるをえない．しかし，その場合にも即座に 力ずくで 数値解を求める前に，あらかじめ微分方程式の解の性質を調べておくべきであり，またそもそも数値解は何らかの方法で検証しておかなければならない．そこで，精度よい近似解を求めるために微分方程式自体を解析する必要が生ずる．一般に，よい近似解は定量的に高い精度を与えるにとどまらず，その定性的性質を理解しやすい形をしている．

微分方程式の解析法は**大域解析** (global analysis) と**局所解析** (local analysis) に大別できる．前著では，主として境界値問題を解くための微分方程式の体系的近似解法を解説した．これは微分方程式の大域解を求める方法，すなわち大域解析に属する．そして，この解析方法と対比すべき微分方程式，特にその特異点・臨界点における局所漸近解析を解説するのが本書の目的である．その脈絡において，前著で詳述することなく導入した概念,「極限循環軌道」,「(不) 安定螺旋点」,「切断」,「(非) 正規特異点」,

「可動特異点」,「自然発生特異点」,「フロベニウス展開」などを詳しく説明する.

微分方程式の局所解析からは解の局所的性質が得られるに過ぎないのではないか,という読者の疑念はもっともである.ところが,微分方程式の特異点および臨界点の局所漸近解析には,微分方程式およびその解の局所的性質はもちろん大域的性質をも明らかにする,という初学者の想像を絶する優れた特長がある.これは,前著の多数の例に見ることができる漸近級数展開の特長と重なる.

なお,漸近級数展開と漸近関係の基礎理論は,前著同様に本書を記述する言語に相当する役割を担う.そこで第 1 章冒頭で,前著第 2 章「漸近級数」の内容のうち本書に必須の事項を抜粋し,1-1 節の最後に微分方程式の局所漸近解析の簡単な実例を提示する.続く 1-2 節以降で,特異点・臨界点における局所漸近解析に関するいくつかの典型的例題を採り上げることにより,本書の構成を概観する.

第 2 章では,線形常微分方程式の特異点とその局所解析の理論を解説し,それを特殊関数などに適用する.その結果として,前著付録 A および本書 5-6 節の特殊関数の漸近級数展開の公式のいくつかを実際に導く.第 3 章では,非線形常微分方程式の局所解析の有力な手法の一つである**位相空間解析**を採り上げ,臨界点の局所解析が解の大域的性質を明らかにする例を紹介する.そして,ここまで目覚しい活躍を示した特異点に関する理論を完成するために,第 4 章では,一般解に含まれる積分定数をいかように選んでも表すことのできない,すなわち一般解とは別種の解・**特異解**の性質とその存在条件を明らかにし,特異解が特異点の集合であることを示す.最終第 5 章では,第 1 章～第 4 章における記述の展開においてやや詳細にすぎ話の腰を折るおそれなしとしない事項,あるいは本書を理解するための前提となる,あるいはそれらに関連する事項をとりまとめる.応用面を重視する読者は,基礎理論の細部に及ぶ 2-3 節,5-3 節,5-5 節に関して,その結論のみを確認し,その詳細を読み飛ばしてもかまわない.

なお,本書の読者は線形代数,常微分方程式論および複素関数論の基礎を習得していることが望ましい.

2010 年 3 月　　　　著　者

目　次

第 1 章

局所漸近解析概観

本書全体の要約版ともいうべき本章では，微分方程式の局所漸近解析のさまざまな手法を読者の一覧に供し，続く第 2 章〜第 4 章でそれらを詳述する．

まず 1-1 節で，微分方程式の局所漸近解析全般の基礎である漸近級数展開の理論([5] 第 2 章)のうち，本書に必須の部分を要約する．そして節末で「はじめに」で採り上げた例題の局所漸近解析を実施する．

後続の各節で引き続き，局所解析による典型的な例題を採り上げて具体的に解説する．まず 1-2 節では，バラバラに分布する初期値から出発する解曲線群がやがていくつかの漸近曲線に収束してゆくという視覚的に鮮明な大域的性質を，微分方程式の局所解析により明らかにする．1-3 節では，ベッセル関数の $x \to +\infty$ の極限における局所解析が，x の定義域のうち 1 付近の小さな値まで包含する大域において高精度を保つ漸近級数をもたらすことを示す．1-4 節では，非線形微分方程式に特有の特異点である可動特異点を取り扱う．1-5 節では一転して，特異点を通過する数値計算法を紹介する．読者の多くは，関数の値が発散する特異点近傍での数値計算は無理である，と即断しているかもしれないが，実はさにあらず，特異点を通過して数値計算を続行することは可能である．例として，実軸上に無限個の極をもつパンルヴェ(Painlevé) 超越関数の数値解を求める．最後に 1-7 節で特異点の集合が解曲線となったもの，すなわち特異解に関する理論を展開する．

1-1　漸近級数展開と漸近関係

■ [漸近関係と関数の相対的大きさに関する記号]

漸近解析の理論と応用を解説するのに先立ち，二つの関数 $f(x)$ と $g(x)$ の相対的大きさに関する記号を定義し，その性質をまとめておく．まず，$f(x)$ と $g(x)$ が次の関係にあるとき，

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 0 \tag{1-1-1}$$

「$x \to x_0$ の極限において（あるいは単に「$x \to x_0$ のとき」），$f(x)$ は $g(x)$ より（はるかに）小さい（$g(x)$ は $f(x)$ より（はるかに）大きい）」といい，これを

$$f(x) \ll g(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-2a}$$

または

$$g(x) \gg f(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-2b}$$

と表記する．さらに，これらの不等式と同じ命題を小文字の**オーダー記号**（または**ランダウ**（Landau）**記号**）o を用いて

$$f(x) = o(g(x)) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-3}$$

と表記することもあり，「$f(x)$ は $g(x)$ より小さなオーダーである」と読む．

次に，$f(x)$ と $g(x)$ が

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 \tag{1-1-4}$$

すなわち，

$$f(x) - g(x) \ll f(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-5}$$

という関係にあるとき，「$x \to x_0$ のとき（の極限において），$f(x)$ は $g(x)$ に**漸近する**」といい，これを

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-6a}$$

または

$$g(x) \sim f(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-6b}$$

と表記する．このように漸近関係記号 ~ で結ばれた関係式を**漸近関係**（**式**）と呼ぶ[*1]．

さらに，$f(x)$ と $g(x)$ が $x = x_0$ の近傍で，x によらないある正の定数 K について，

[*1] 本項に現れた他の記号（$\ll$，$\gg$，o，O）で結ばれた式を含めて漸近関係式と呼ぶこともある．

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| \leq K \tag{1-1-7}$$

という関係を満たすとき，すなわち，その比が有界であるとき，「$x \to x_0$ のとき，$f(x)$ は $g(x)$ の**オーダーである**」といい，これを大文字のオーダー記号 O を用いて

$$f(x) = O(g(x)) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-8}$$

と表記する．

■ [漸近関数列と漸近級数の定義]

関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ がすべての m について

$$\varphi_{m+1}(x) = o(\varphi_m(x)) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-9}$$

であるとき，これを**漸近関数列**(asymptotic sequences)であるという．その漸近関数列 $\{\varphi_m(x)\}$ により展開した級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x)$ がすべての k について

$$y(x) - \sum_{m=0}^{k} a_m\varphi_m(x) \ll \varphi_k(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-10}$$

の条件を満たすとき，その級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x)$ は $y(x)$ の**漸近級数**(asymptotic series)であるといい，

$$y(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m\varphi_m(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-11}$$

と表記する．

■ [漸近ベキ級数]

最も頻繁に現れる漸近級数は漸近関数列 $\{(x-x_0)^m\}$ によるベキ級数展開である．

ベキ級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ が $y(x)$ のテイラー級数 $a_m = \dfrac{y^{(m)}(x_0)}{m!}$ であれば，それが収束するか否かにかかわらず，自動的にすべての k について

$$y(x) - \sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m = \frac{y^{(k+1)}(x_0+\theta(x-x_0))}{(k+1)!}(x-x_0)^{k+1} \ll (x-x_0)^k$$
$$(0 < \theta < 1) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-12}$$

の条件を満たす．したがって，テイラー級数 $\sum_{m=0}^{\infty} a_m(x-x_0)^m$ は $y(x)$ の漸近級数であり，

$$y(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m (x - x_0)^m \qquad x \to x_0 \tag{1-1-13}$$

と表記する．$x \to +\infty$ の場合には，漸近関数列 $\{x^{-m}\}$ によるベキ級数展開を用いる．

$$y(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m} \tag{1-1-14}$$

漸近級数の第一項を**主要部**(leading term，leading behavior)と呼ぶ．また，主要部の中で最も急激に変動する因子を**支配因子**(controlling factor)と呼ぶ．

■ ［漸近級数の和と積］

漸近級数の加法と乗法規則は以下のとおりである．

$$f(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi_m(x), \quad g(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} b_m \varphi_m(x) \qquad x \to x_0 \tag{1-1-15}$$

であるとき，次の加法公式が成立し，

$$cf(x) + dg(x) \sim \sum_{m=0}^{\infty} (ca_m + db_m)\varphi_m(x) \quad (c, d：\text{定数}) \quad x \to x_0 \tag{1-1-16}$$

また，ベキ級数 $f(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n$, $g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n (x - x_0)^n$ の場合には次の乗法公式が成立する．

$$f(x)g(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} h_n (x - x_0)^n, \quad h_n = \sum_{m=0}^{n} a_m b_{n-m} \qquad x \to x_0 \tag{1-1-17}$$

■ ［漸近級数の項別積分］

漸近級数は項別に積分(x_0 を一端とする有限区間の定積分)することが可能である．$x \to +\infty$ の極限における漸近関数列 $\{x^{-m}\}$ によるベキ級数展開

$$y(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \cdots = \sum_{m=0}^{\infty} a_m x^{-m} \tag{1-1-18}$$

では，

$$\int_x^{\infty} \left(y(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} \right) dt \sim \frac{a_2}{x} + \frac{a_3}{2x^2} + \frac{a_4}{3x^3} + \cdots = \sum_{m=2}^{\infty} \frac{a_m x^{-m+1}}{(m-1)} \tag{1-1-19}$$

とする．一方，関数の微分を含む漸近関係式の両辺を積分し，不定積分の漸近関係式を得るときには注意を要する．つまり，特殊な例においては漸近関係式

$$f(x) \sim g(x) \qquad x \to x_0 \qquad \text{(1-1-6 再掲)}$$

の両辺をそれぞれ不定積分したもの，すなわち漸近関係

$$\int^{x} f(t)dt \sim \int^{x} g(t)\,dt \qquad x \to x_0 \tag{1-1-20}$$

が成立しない場合があるので個別に吟味せねばならない.

■ [漸近級数の項別微分]

漸近級数を項別に微分することは許されない場合があるので個別に吟味せねばならない. しかし, 応用上最も重要なベキ級数による漸近展開の場合には,「関数 $f(x)$ とその微分 $f'(x)$ のベキ級数による漸近級数展開が可能であり, $f'(x)$ が積分可能である」という条件を満たすとき, $f(x)$ の漸近級数を項別微分することが可能である.

■ [漸近級数の定量的評価]

自然科学が対象とする数値はすべて測定値・観測値であるから必ず誤差を伴う. たとえば, 化学分析では有効数字 4, 5 桁程度を得ることができるが, 物理実験では 2, 3 桁が一般的である. 特異な例をあげるならば, 摩擦係数という物理量は本質的に近似値しか存在しない. 地球物理学では震度・マグニチュードなど物理量の対数, すなわちもとの物理量の桁しか問題にならないほど誤差が大きい. したがって, 自然科学に応用する際, 解の定性的性質を正確に知ると同時に, 定量的にいかなる精度の解を得る必要があるのか, 常に留意せねばならない. これは社会科学においても同様である.

次の図で具体的に検討してみよう. 図 1-1 の 3 本の曲線は上から順に $y = \tan x$, $y = x$,

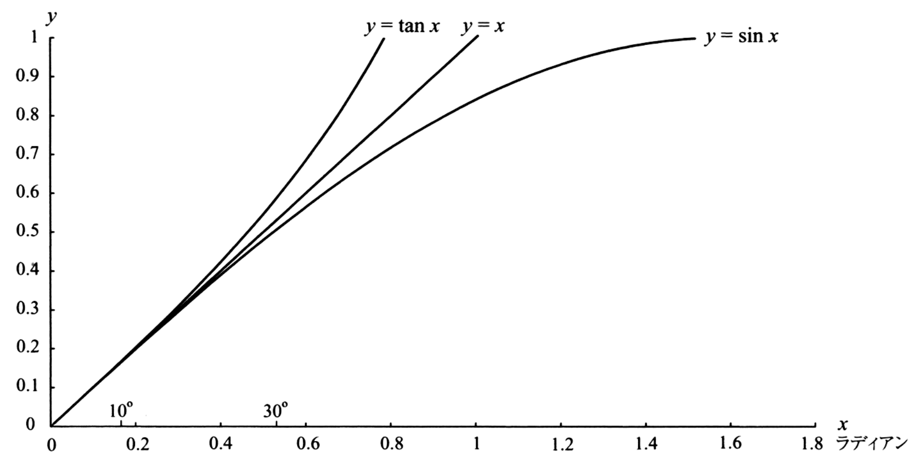


図 1-1　正弦曲線・正接曲線とその近似直線

$y = \sin x$ である．高校時代以来，数え切れないほどたびたび利用してきた近似，

$$\sin x \sim x, \quad \tan x \sim x \qquad x \to 0 \tag{1-1-21}$$

が定量的にどの程度よい近似であるかを示すものである．図 1-1 によれば，$x = 0.17$ ラディアン（10°）程度まではグラフの線の太さでは 3 曲線はほぼ重なっている．しかも幾何光学などで最も頻用される近似式 $\sin x \sim x,\ x \to 0$ という漸近関係は，x が $0.52(\pi/6)$ ラディアン（30°）まで大きくなっても誤差は 4%でしかない．

一方，幾何光学において近似式 $\tan x \sim x,\ x \to 0$ を $x = 0.52(\pi/6)$ ラディアン（30°）まで使用することはためらわれるかもしれない．その原因は，これら二つの近似式

$$\sin x - x = -\frac{x^3}{6} + O(x^5) \qquad x \to 0 \tag{1-1-22}$$

$$\tan x - x = \frac{x^3}{3} + O(x^5) \qquad x \to 0 \tag{1-1-23}$$

の誤差がいずれも $O(x^3)$ であるにもかかわらず，その係数（1/6 と 1/3）が倍違うためである．

■ ［局所漸近解析の一例］

ここで「はじめに」で触れた例題，すなわち厳密解をベッセル関数で表すことができる微分方程式の漸近解析を実施することにより，その手法に慣れるとともに本書の今後の展開に見通しをつけていただこう．微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + ax^2y = 0, \quad a > 0 \tag{1-1-24}$$

の一般解は，

$$y = \sqrt{x}\left[AJ_{1/4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}x^2\right) + BY_{1/4}\left(\frac{\sqrt{a}}{2}x^2\right)\right] \quad (A, B：定数) \tag{1-1-25}$$

であるが，この式だけからその振る舞いを知ることは難しい．そこで，得られている解ではなく微分方程式自体の $x \to +\infty$（非正規特異点：1-4 節）における局所漸近解析を実施して，その解の $x \to +\infty$ における振る舞いを初等関数で表現してみよう．

微分方程式 (1-1-24) に，

$$y(x) = \exp(Q(x)) \tag{1-1-26}$$

を代入し（[5] 第 5 章），共通因数 $\exp(Q(x))$ で割ると，

$$\frac{d^2Q(x)}{dx^2} + \left[\frac{dQ(x)}{dx}\right]^2 + ax^2 = 0 \tag{1-1-27}$$

を得る．このままでは，もとの微分方程式 (1-1-24) に比べ難易度の改善は見られないが，非正規特異点近傍において微分方程式 (1-1-27) の第 1 項と第 2 項の間には次の関係

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \tag{1-1-28}$$

が成立する場合がきわめて多い．その結果，第1項すなわち2階の導関数を無視した微分方程式 (1-1-27) は1階(非線形)微分方程式となり，一般に後者の方がより容易に厳密解を得ることができる．ただ，特殊な例では条件 (1-1-28) が成立しないこともあるので，後にこの近似のもとに得られた解を吟味する必要がある．この近似により，

$$\frac{dQ(x)}{dx} \sim \pm i\sqrt{a}x \qquad x \to +\infty \tag{1-1-29}$$

すなわち，

$$Q(x) \sim \pm\frac{i\sqrt{a}}{2}x^2 \qquad x \to +\infty \tag{1-1-30}$$

を得る．さらに，近似精度を高めるために

$$Q(x) = \pm\frac{i\sqrt{a}}{2}x^2 + R(x), \quad x^2 \gg R(x) \qquad x \to +\infty \tag{1-1-31}$$

とおき，式 (1-1-27) に代入すると，

$$\left[\pm i\sqrt{a} + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\pm i\sqrt{a}x + \frac{dR}{dx}\right)^2\right] + ax^2 = 0 \tag{1-1-32}$$

を得る．

例外なく成立するわけではないが，漸近関係の両辺を微分することが許される場合がこれまたきわめて多い([5] 第2章)．そこで，式 (1-1-31) より，

$$2x \gg R'(x), \quad 2 \gg R''(x) \qquad x \to +\infty \tag{1-1-33}$$

を仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．

式 (1-1-32) から相殺する項を取り除き，漸近関係 (1-1-33) を適用して卓越する項のみを残すと，式 (1-1-32) は漸近関係

$$i\sqrt{a} \sim -2i\sqrt{a}x\frac{dR}{dx} \qquad x \to +\infty \tag{1-1-34}$$

となる．これから

$$R(x) \sim -\frac{1}{2}\log x \qquad x \to +\infty \tag{1-1-35}$$

を得る．ここでも，$R(x)$ は仮定 (1-1-33) を満たしていることを確認できる．こうして，解の $x \to +\infty$ における主要部

$$y(x) \sim \exp\left[\pm\frac{i\sqrt{a}}{2}x^2 - \frac{1}{2}\log x\right] = \frac{1}{\sqrt{x}}\exp\left[\pm\frac{i\sqrt{a}}{2}x^2\right] \qquad x \to +\infty$$

さらに，式 (1-1-24) が線形微分方程式であるので，実数関数の和に整理しなおして，

$$y(x) \sim \frac{1}{\sqrt{x}}\exp\left[A\sin\frac{\sqrt{a}x^2}{2} + B\cos\frac{\sqrt{a}x^2}{2}\right] \quad (A, B：定数) \quad x \to +\infty \tag{1-1-36}$$

を得る．こうして，局所解析により微分方程式 (1-1-24) の解を初等関数で表すことができた．

ここまで到達してもなお,「微分方程式の解の $x \to +\infty$ における振る舞いを知ったことにどのようなご利益があるのか？」という疑問を呈する読者には，1-3 節まで辛抱していただかなければならない．ベッセル関数の $x \to +\infty$ の極限における局所解析が，x の定義域のうち 1 付近の小さな値まで包含する大域において高精度を保つ解を与える例を見ることができるだろう．

これら多数の例が示すように，微分方程式の通常点ではなく特異点こそが微分方程式およびその解の性質を特徴づける．つまり，特異点の局所解析のみから微分方程式およびその解の大域的性質の導き出すことができる．また，1-2 節および第 3 章で述べるように，n 階常微分方程式と等価な n 元連立 1 階常微分方程式の位相空間上の臨界点のまわりの局所解析のみからも，同様に微分方程式およびその解の大域的性質を導き出すことができるのである．

1-2　臨界点まわりの漸近解析による解の大域的性質の導出

独立変数の全定義域にわたる，微分方程式の厳密解を得ることができない場合の有力な解析法の一つが局所漸近解析である．まだ漸近解析に習熟していない読者が，独立変数の一点近傍の局所解析から得られるのはその点近傍の解の性質までであろうと推測するのは自然であるが，その予想に反し，一般に特異点・臨界点の局所漸近解析の結果は解の大域的性質まで導き出すことができるのである．何はともあれ，本節でその具体例を示すことにしよう．

図 1-2 は 1 階非線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \cos(xy^2) \tag{1-2-1}$$

の y 軸上に分布する 15 個の点（初期値）から出発した解曲線群が，x の増加とともにやがて四つのグループに収束してゆく様子を示している．

この例のように解曲線群がいくつかのグループに収束することは解の**大域的**（global）性質である．初学者には意外なことかもしれないが，以下に示すように微分方程式の $x \to +\infty$ における**局所漸近解析**（local asymptotic analysis）を行うだけで，解のこの大域的性質を明らかにすることができるのである．

まず新しい変数

$$u = xy^2 \tag{1-2-2}$$

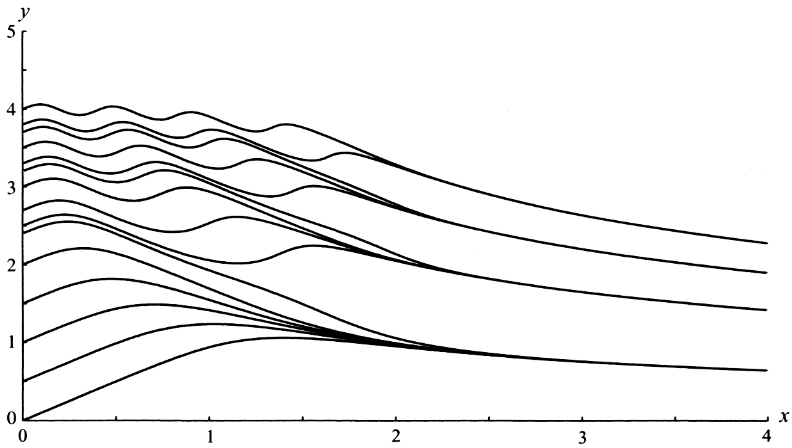


図 1-2　ばらばらの初期値からいくつかの曲線に集約される解曲線群

を導入し，式 (1-2-1) に代入すると，変数 u の満たすべき微分方程式は

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} + 2\sqrt{xu}\cos u \tag{1-2-3}$$

である．次に，$x \to +\infty$ の極限において，微分方程式 (1-2-3) の 3 項の相対的大きさを検討しよう．すなわち，いずれか 1 項が他の 2 項に比べて十分小さく，残りの 2 項が**卓越平衡**(dominant balance)にある可能性を探ることにする．

(A)　まず，

$$\frac{du}{dx} \sim \frac{u}{x} \gg 2\sqrt{xu}\cos u \qquad x \to +\infty \tag{1-2-4}$$

と仮定しよう．このとき，

$$\int^u \frac{ds}{s} \sim \int^x \frac{dt}{t} \qquad x \to +\infty$$

であるから，

$$u \sim Ax \quad (A：定数) \qquad x \to +\infty \tag{1-2-5}$$

を得るが，この結果は，仮定 (1-2-4) の後半

$$\frac{u}{x} \gg 2\sqrt{xu}\cos u \qquad x \to +\infty$$

に矛盾する．

(B)　次に

$$\frac{du}{dx} \sim 2\sqrt{xu}\cos u \gg \frac{u}{x} \quad x \to +\infty \tag{1-2-6}$$

と仮定すると，

i）$\cos u = O(1)$ ならば

$$\frac{du}{dx} \sim 2\sqrt{xu}$$

から

$$u \sim \frac{4}{9}x^3 \qquad x \to +\infty \tag{1-2-7a}$$

を得るが，これは

$$2\sqrt{xu} \gg \frac{u}{x}$$

から得られる

$$4x^3 \gg u$$

と矛盾する．

ii）$\cos u = o(1)$ ならば

$$u \sim \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi + o(1) \tag{1-2-7b}$$

を得るが，これは

$$\frac{du}{dx} \gg \frac{u}{x}$$

と矛盾する．

(C)　最後に残された可能な漸近関係は

$$2\sqrt{xu}\cos u \sim \frac{u}{x} \gg \frac{du}{dx} \qquad x \to +\infty \tag{1-2-8}$$

である．

この漸近関係を満たすためには，

$$u = O(1), \quad \cos u = O(x^{-3/2}) \qquad x \to +\infty \tag{1-2-9}$$

でなければならない．それゆえ，

$$\begin{aligned} u(x) &= \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi + v(x) \quad (n：\text{整数}) \\ v(x) &= o(1) \qquad x \to +\infty \end{aligned} \tag{1-2-10}$$

とおくことができる．式 (1-2-10) を微分方程式 (1-2-3) に代入すると

$$\frac{dv}{dx} = \frac{(1/2 + n)\pi + v}{x} + 2\sqrt{\left[\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi + v\right]x}\,(-1)^{n+1}\sin v \tag{1-2-11}$$

を得るが，これから卓越項を取り出すと，漸近関係式

$$\frac{(1/2 + n)\pi}{x} \sim 2\sqrt{\left(\frac{1}{2} + n\right)\pi x}\,(-1)^n v \qquad x \to +\infty \tag{1-2-12}$$

を導くことができ，その解，

$$v \sim (-1)^n \frac{\sqrt{(1/2+n)\pi}}{2x^{3/2}} \qquad x \to +\infty \tag{1-2-13}$$

は式 (1-2-9) を満たしている．したがって，式 (1-2-10) より，

$$u \equiv xy^2 \sim \left(\frac{1}{2}+n\right)\pi + (-1)^n \frac{\sqrt{(1/2+n)\pi}}{2x^{3/2}} \qquad x \to +\infty \tag{1-2-14}$$

を得る．

漸近関係式 (1-2-14) は，曲線

$$xy^2 = u_0 = \left(\frac{1}{2}+n\right)\pi \quad (n：\text{整数}) \tag{1-2-15}$$

が微分方程式 (1-2-1) の解曲線 y の漸近曲線である可能性を示している．実際，図 1-2 の解曲線群に曲線 (1-2-15) を重ねると（図 1-3），曲線 (1-2-15) のうち，偶数の n に対応するもの（図中点線）が解曲線群の漸近曲線である．しかも，解曲線群は式 (1-2-14) が示すとおり，上から漸近曲線に接近している．$x \to +\infty$ における局所解析が，$x \geq 3$ の広範な領域で成立する解の大域的な性質を明らかにしたことに注目されたい．

なお，図 1-3 の一点鎖線は曲線 (1-2-15) のうち，奇数の n に対応するものである．これらが漸近曲線ではないことは後に考察する．また，すべての解曲線は曲線 (1-2-15) との交点で式 (1-2-1) により勾配が 0 となる．

ところで，微分方程式 (1-2-1,3) を連立微分方程式とみなすと，両者の右辺は，いずれも従属変数 y, u のみで表すことができる．

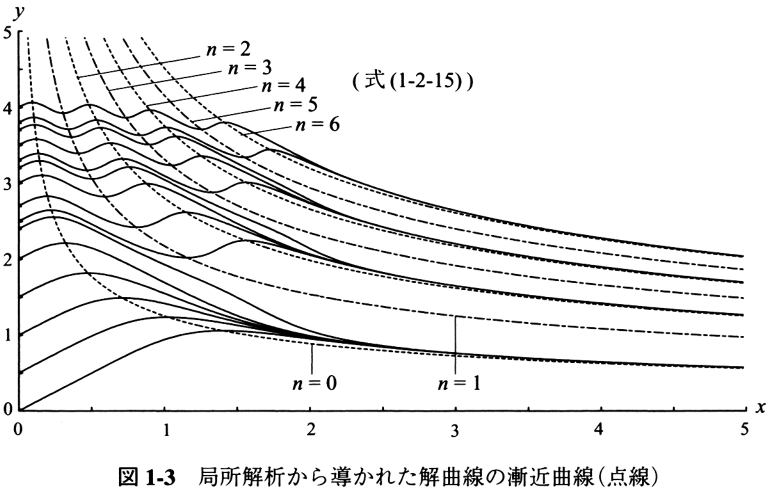


図 1-3　局所解析から導かれた解曲線の漸近曲線（点線）

$$\frac{dy}{dx} = \cos u \tag{1-2-1a}$$

$$\frac{du}{dx} = y^2 + 2\frac{u}{y}\cos u \tag{1-2-3a}$$

連立微分方程式 (1-2-1a, 3a) のように，独立変数 x を陽に含まない微分方程式を**自律系**(autonomous)微分方程式と呼ぶ．さらに，これらの右辺をそれぞれ 0 とおいた連立方程式

$$\cos u = 0 \tag{1-2-16}$$

$$y^2 + 2\frac{u}{y}\cos u = 0 \tag{1-2-17}$$

を満たす解，すなわち位相平面上の点 (y_0, u_0)

$$y_0 = 0 \tag{1-2-18}$$

$$u_0 = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \quad (n：整数) \tag{1-2-19}$$

を**臨界点**(critical points)と呼ぶ．なお，式 (1-2-17) において $u/y = xy$ であることに注意されたい．そして，式 (1-2-15) のうち，偶数の n に対応する曲線

$$xy^2 = u_0 = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \quad (n：偶数) \tag{1-2-15 再掲}$$

が，解曲線群が集約されてゆく漸近曲線であり，すべての漸近曲線はやがて

$$y = y_0 = 0 \tag{1-2-20}$$

に漸近する．のちに，第 3 章で詳述する「位相空間(平面)解析」において，**臨界点**の局所解析が非線形微分方程式の解の大域的性質を決定する，という目覚しい成果をあげることができることを詳述する．

ところで，一つ片づけなければならないことが残っている．なぜ，曲線群 (1-2-15) のうち，奇数の n に対応するもの(図中一点鎖線)は漸近曲線にならないのであろうか．図 1-3 によれば，漸近曲線 (1-2-15) への収束が起きているのは $x = O(1)$ の領域であり，この領域では微分方程式

$$\frac{du}{dx} = \frac{u}{x} + 2\sqrt{xu}\cos u \tag{1-2-3 再掲}$$

の各項は同じオーダーである．そこで，漸近曲線の候補である

$$xy^2 = u_0 = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \quad (n：整数) \tag{1-2-19 再掲}$$

の近傍

$$u = u_0 + \Delta u = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi + \Delta u, \quad \Delta u \ll u_0 = \left(\frac{1}{2} + n\right)\pi \tag{1-2-21}$$

において従属変数 u がどのように振る舞うかを調べてみよう．式 (1-2-21) を (1-2-3) に代入すると，

$$\frac{d\Delta u}{dx} = \frac{(1/2+n)\pi + \Delta u}{x} + 2\sqrt{x\left[\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi + \Delta u\right]}(-1)^{n+1}\sin\Delta u \qquad (1\text{-}2\text{-}22)$$

となり，$\Delta u \ll u_0 = (1/2+n)\pi$ を用いると，さらに

$$\frac{d\Delta u}{dx} \sim \frac{(1/2+n)\pi}{x} + 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}+n\right)\pi x}\,(-1)^{n+1}\Delta u \qquad \Delta u \to 0 \qquad (1\text{-}2\text{-}23)$$

を得る．漸近関係式 (1-2-23) の右辺は n が奇数であり，かつ $\Delta u > 0$ のとき，常に正である．

図 1-3 によれば，それぞれの解曲線は当初，曲線

$$xy^2 = u_0 = \left(\frac{1}{2}+n\right)\pi \quad (n：整数) \qquad (1\text{-}2\text{-}19 再掲)$$

を左から右に（u が増加する方向に）横切ってゆく．このうち，奇数の n に対応する曲線を横切ったあと（$\Delta u > 0$），漸近関係式 (1-2-23) によれば，$d\Delta u/dx > 0$ であるから，解曲線は n : 奇数に対応する曲線からどんどん遠ざかってしまう．つまり，奇数の n に対応する曲線 (1-2-19) 近傍における解の振る舞いは不安定（第 3 章）であるゆえ，漸近曲線にならないのである．

1-3　特異点まわりの漸近解析による超越関数の数値評価

微分方程式の通常点（1-4 節）は，**原理的には**かなりの仕事をしてくれそうな点である．たとえば，原点 $x = 0$ は指数関数 e^x の通常点であり，e^x には $x = 0$ のまわりに ∞ の収束半径（5-2 節）をもつテイラー級数展開

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

が存在する．それゆえ，この級数展開式が独立変数 x のあらゆる値に対する指数関数 e^x の値を与えるオールマイティーな表式であるかにみえるが，実際に試みると，計算機にはオーバーフローという制約があるため，これが用をなすのはせいぜい $x = \pm 10$ 程度まででしかない．また，その関数に特異点が存在する場合には，収束半径自体，特異点までの距離を超えることができないという制約を受ける（5-2 節）．

一方，微分方程式の**特異点**はともすれば**異常な点**と受け取られがちである．初学者が，かかわり合うのは通常点だけにして特異点は考慮の外におきたい，という誘惑にかられるのも無理からぬところである．ところが実は，特異点こそきわめて役に立つ

点であり，個々の微分方程式およびその解の特徴は特異点にこそ現れる，といっても過言ではない．本書を読み進むに従い，読者はその事実を実感するだろう．

また,「$x \to +\infty$ の極限でのみ成立する式など実用に役立たない」とばかり，これを無視しようとする読者があるかもしれないが，再びさにあらず，$x \to +\infty$ の極限(局所)で成立すべく導かれた式が，しばしばはるかに小さな値，ほとんど 1 に近い数値に対しても成立するのを知り驚くはずである．実際，本書には $x \to +\infty$ の極限で成立する漸近関係式が頻出する．

超越関数(transcendental functions)

x の多項式 $\{c_k(x), k = 0, 1, \cdots, n\}$ を係数とする y の多項式

$$c_n(x)y^n + c_{n-1}(x)y^{n-1} + \cdots + c_1(x)y + c_0(x) = 0$$

の解として定義される関数 $y(x)$ を x の**代数関数**(algebraic functions)と呼ぶ．$y = x^2, y = \sqrt{x}, y = 1/(x+1)$ などがその例である．そして代数関数以外のすべての関数を**超越関数**と称する．超越関数のうち，三角関数・指数関数・対数関数とそれらの逆関数から代数演算により合成される関数(例：双曲線関数)を特に**初等関数**(elementary functions)と呼ぶ．

特殊関数(special functions)という用語は関数論において頻繁に現れる関数の総称であり，明確な定義はない．主として 2 階常微分方程式の解として定義される関数を指すが，通常，初等関数および，差分方程式の解として定義されるガンマ関数もこれに含まれる．

■ ［第 1 種ベッセル関数の数値評価］

ベッセル関数は，多くの読者にとって三角関数・指数関数・対数関数など初等関数の次に出会う，特殊関数のうちでは最も なじみ深い関数の一つであろう[*2]．ラプラス(Laplace)の微分方程式を円柱(円筒)座標 (r, θ, z) で表すと

$$\begin{aligned}\nabla^2 f &\equiv \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(x, y, z) \\ &= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right) f(r, \theta, z) = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}1)\end{aligned}$$

となるが，その変数分離型の解

$$f(r, \theta, z) = R(r)\Theta(\theta)Z(z) \qquad (1\text{-}3\text{-}2)$$

を仮定すると，そのうち，$R(r)$ の満たすべき微分方程式がベッセルの微分方程式

$$r^2 \frac{\partial^2 R(r)}{\partial r^2} + r\frac{\partial R(r)}{\partial r} + (r^2 - \nu^2)R(r) = 0 \qquad (1\text{-}3\text{-}3)$$

[*2] 前著では，漸近級数の実用的側面を紹介するための一例としてこの問題を取り扱った．本節では同じ例題を微分方程式の局所漸近解析という観点から再考する．

となる．それゆえ，ベッセル関数は円柱（円筒）関数と呼ばれることがあり，軸対称現象を取り扱うときにはもちろん，数理物理学および工学の広範な現象に登場する．第1種のベッセル関数 $J_\nu(x)$ および第2種のベッセル関数 $Y_\nu(x)$ がベッセルの微分方程式 (1-3-3) の二つの独立な解である．なお，ν が整数でなければ $J_{-\nu}(x)$ も独立な解である（5-6 節）．

このように比較的身近な第1種のベッセル関数 $J_\nu(x)$ だが，その数値を実際に計算することは容易でない．そこで，0 次の第1種ベッセル（Bessel）関数 $J_0(x)$（図 1-4）の値を評価する具体的方法を調べてみよう．まず，第1種ベッセル関数の正規特異点（1-4 および 2-3 節）である原点 $x=0$ のまわりのフロベニウス級数展開（2-3 および 5-6 節）

$$J_\nu(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu+k+1)} \tag{A-2a}$$

を用いる．0 次の場合には，

$$J_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-x^2/4)^n}{(n!)^2} = 1 - \frac{x^2/4}{(1!)^2} + \frac{(x^2/4)^2}{(2!)^2} - \frac{(x^2/4)^3}{(3!)^2} - \cdots \tag{1-3-4}$$

というテイラー級数となる．その収束半径 R の 2 乗は

$$R^2 = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{2n}}{a_{2n+2}}\right| = \lim_{n\to\infty} 4(n+1)^2 = +\infty \tag{1-3-5}$$

であるから（5-2 節），無限遠点を除く**すべての** x の値に対して $J_0(x)$ は収束する．すなわち，級数 (1-3-4) を有限級数で近似して $J_0(x)$ の数値評価を行う際，変数 x の値ごとに十分な項数を用意しさえすれば，必要な精度を確保することができる．つまり，**原理的には**式 (1-3-4) により，あらゆる x の値における $J_0(x)$ の精度よい近似値を算出し

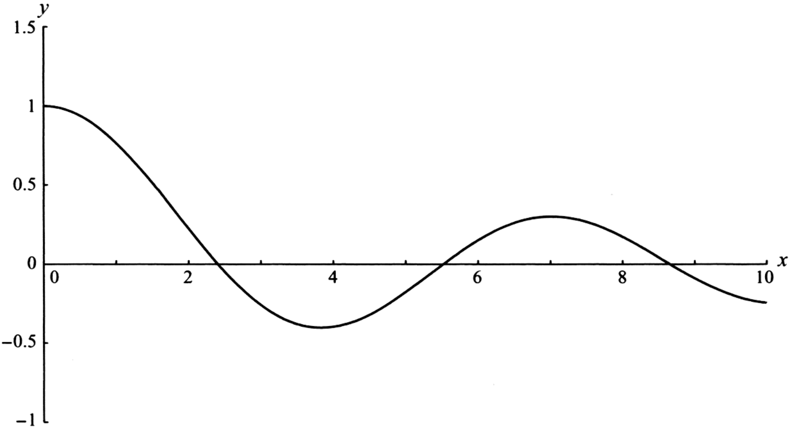


図 1-4　0 次の第1種ベッセル関数 $J_0(x)$

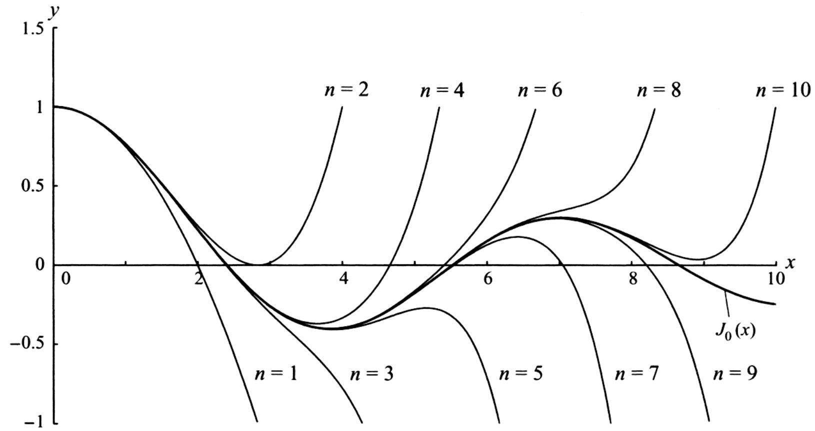


図 1-5 有限テイラー級数(細線)による $J_0(x)$ (太線)の数値評価

得るのである.

実際にこの方法で式 (1-3-4) の第 n 項まで ($n = 1$〜10) 残した有限級数により $J_0(x)$ を数値評価したのが図 1-5 である. それぞれの曲線は当初よく $J_0(x)$ と一致しており項数 n を増加させることによりよく善戦するが, いずれもやがて矢折れ力尽きたごとく戦線から離脱してゆく. 項数をふやすことにより, 確かに高精度で計算することのできる x の値の範囲は広がってゆく. しかし, 桁落ちやオーバーフローの問題を克服することができないため, 通常の計算機を使用する限り $x = 10$ を大きく超える数値についてテイラー級数展開 (1-3-4) を用いて $J_0(x)$ の数値を計算することは至難である.

そこで登場するのが, **非正規特異点**(1-4 節および 2-1 節)である無限遠点のまわりの局所漸近解析である. その成果が, 2-4 節で導出する $x \to +\infty$ の極限における**漸近級数展開**

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(P(\nu,x)\cos\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) - Q(\nu,x)\sin\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)\right) \tag{A-7}$$

$$P(\nu,x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu,2k)}{(2x)^{2k}}$$
$$= 1 - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)}{2!(8x)^2} + \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)(4\nu^2-49)}{4!(8x)^4} - \cdots \tag{A-9a}$$

$$Q(\nu,x) \sim \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{(\nu,2k+1)}{(2x)^{2k+1}} = \frac{4\nu^2-1}{8x} - \frac{(4\nu^2-1)(4\nu^2-9)(4\nu^2-25)}{3!(8x)^3} + \cdots \tag{A-9b}$$

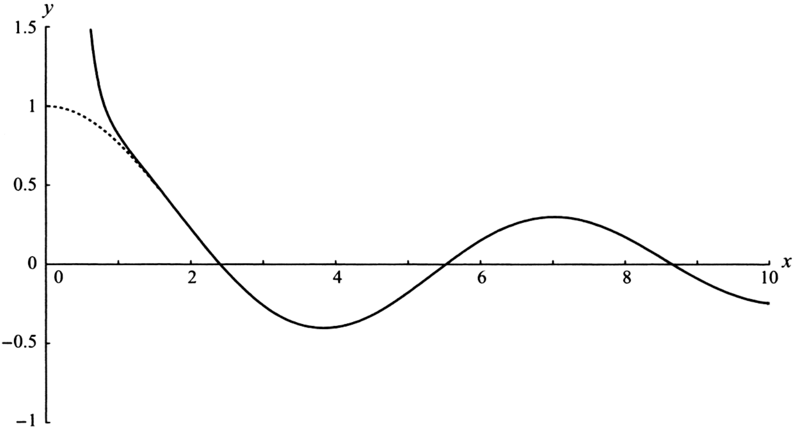


図 1-6　$x = +\infty$ のまわりの漸近級数展開（A-7：式 (A-9a) で第 4 項まで，(A-9b) で第 5 項まで残したもの）による $J_0(x)$ の数値評価（実線）とテイラー級数展開（1-3-4：$n = 12$，点線）

である（図 1-6 中の実線，点線はテイラー級数展開 ($n = 12$) (1-3-4)）．ここに

$$(\nu, 2k) \equiv \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + 2k)}{(2k)!\Gamma(\nu + 1/2 - 2k)} \tag{A-10}$$

はハンケルの記号である．また，

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t}\, dt \quad x > 0 \tag{C-1}$$

はガンマ関数である．

$J_0(x)$ の非正規特異点である $x = +\infty$ のまわりの漸近級数展開は $x = +\infty$ における局所漸近解析であるから，その適用範囲は独立変数 x が 1 に比べて非常に大きい区間に限定されてしかるべき，と読者は予想するであろう．ところが，この漸近級数展開式は $x = +\infty$ からはるばる $x = 1.5$ 付近まで精度よい数値を与えるのである．それはテイラー級数展開 ($n = 12$)（1-3-4，図中点線）と一致することにより確かめられる．つまり，$x = 0$ のごく近傍を除く大部分の定義域にわたり，漸近級数展開式が $J_0(x)$ の高精度の値を与えることができる．この例により，特殊関数の数値を具体的に得るために，特異点のまわりの漸近級数展開（局所漸近解析）が欠かせないことを理解できるだろう．

なお，無限遠点 $x = +\infty$ は，応用数学に頻出する線形微分方程式（ベッセル関数 Bessel functions，エィリー関数 Airy functions，放物円筒関数 Parabolic cylinder functions など）の非正規特異点であり，これらの関数の $x \to +\infty$ の極限における振る舞いを知ることは応用上きわめて重要である（2-4 節および [5]）．

1-4　特異点の分類

これまでの諸例から想像できるように，微分方程式の局所漸近解析により豊かな成果を導くことのできる対象は臨界点ならびに特異点である．**特異点**(singularities, singular points)という述語は，数学の文献に限定しても著者ごとにまた文脈に従い，いくつかの異なるニュアンスで用いられているので，ここで微分方程式論に登場するいくつかの特異点を定義しておこう．

本書で取り扱う特異点を次の三つに分類する．なお，特異点の性質を網羅する必要上，本節では複素変数 $z = x + yi$ の複素関数 $f(z)$ を取り扱う．

1-4-1　関数の特異点(解の特異点)

特異点という述語の数学における最も一般的な用法は**関数の特異点**であろう．これを，微分方程式論の対象となる関数すなわち微分方程式の解の関数としての特異点，という意味で，後に言及する**微分方程式そのものの特異点**と対比しつつ，**解の特異点**と呼ぶことにする．

複素平面上のある領域 D 内のすべての点において微分可能な複素関数を，領域 D において**正則**な**解析関数**(analytic functions, holomorphic functions)と呼ぶ．複素平面において関数 $f(z), z = x + yi$ が微分可能であるとは，

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

の極限が $\Delta z \to 0$ の径路によらず一定値をとることを意味する．そのためには，関数 $f(z)$ の実部 $f_r(z)$ と虚部 $f_i(z)$ はコーシー・リーマン(Cauchy-Riemann)の関係式

$$\frac{\partial f_r(z)}{\partial x} = \frac{\partial f_i(z)}{\partial y}, \quad \frac{\partial f_r(z)}{\partial y} = -\frac{\partial f_i(z)}{\partial x} \tag{1-4-1}$$

を満たす調和関数でなければならない(たとえば [18])．

解析関数 $f(z)$ が D 内で $f'(z_1) = 0$ となる点 z_1 は必ず鞍点であり，$f(z)$ は D 内で(絶対値の)極値をとることはない([5] 第 3 章)．

領域 D において正則な解析関数はその任意階の導関数も正則であり，領域内の任意の点 z_1 のまわりにテイラー級数展開できる．そして，関数が正則でない点をその**関数の特異点**と呼ぶ．

さて，孤立特異点 z_0 (「分岐」(後述)を除く)の近傍で，z_0 まわりのローラン(Laurant)級数

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)dz}{(z - z_0)^{n+1}} \tag{1-4-2}$$

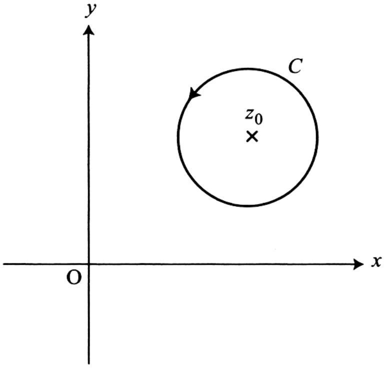


図 1-7 関数の孤立特異点 z_0 を左に見つつ一周する積分径路 C

は収束する．ここに積分径路 C は関数の孤立特異点 z_0 を左に見つつ一周する閉曲線である（図 1-7）．

このうち，負のベキの項数が有限個 M であるとき，

$$f(z) = \sum_{n=-M}^{\infty} a_n(z-z_0)^n = \frac{a_{-M}}{(z-z_0)^M} + \frac{a_{-(M-1)}}{(z-z_0)^{M-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

$$(a_{-M} \neq 0) \quad (1\text{-}4\text{-}3)$$

その特異点 z_0 を M 次の**極**(pole)と呼ぶ．この場合，

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = \infty$$

である．一方，ローラン級数の負のベキの項数が有限でないとき

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \quad (1\text{-}4\text{-}4)$$

その特異点 z_0 を**真性特異点**(essential singularity) と呼ぶ．この場合，

$\lim_{z\to z_0} f(z)$ は不確定

である．すなわち，∞ を含む任意の値 d について，$f(z) \to d$ となる z_0 に収束する点列 $\{z_n\}$ を選択することができる（ワイエルシュトゥラス(Weierstrass)の定理）．

次に別の型の特異点である，分岐について述べるために，対数関数

$$w = \log(z-z_0) \quad (1\text{-}4\text{-}5)$$

を考える．対数関数はその複素変数 z を特異点 z_0 のまわりで極座標表示

$$z - z_0 = re^{i\theta} \quad (1\text{-}4\text{-}6)$$

すると

$$w = \log(z - z_0) = \log r + i\theta \tag{1-4-7}$$

であるから，変数 z が特異点 z_0 のまわりを正の方向に一周するごとに関数の値が $2\pi i$ ずつ増加する多価関数である．そこで，特異点 z_0 から無限遠点に向かう（通例，負の実数軸方向をとる）半直線の**切断**(cut, branch cut) を設けると，この切断を境界とする単連結の領域 D において対数関数 $w = \log(z - z_0)$ は 1 価に確定した解析関数となる（図 1-8）．切断を伴うこのタイプの特異点 z_0 を**分岐**(branch point) と呼ぶ．

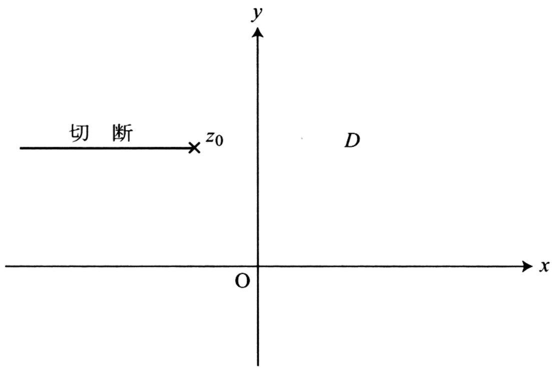


図 1-8　対数関数 $w = \log(z - z_0)$ の切断

ベキ α が整数でない場合の関数

$$(z - z_0)^{\alpha}(= e^{\alpha \log(z - z_0)}) \tag{1-4-8}$$

の特異点 z_0 も同じく分岐である．なお，特異点は分岐と極ないし真性特異点をかねることがある．

例　**フロベニウス級数展開（2-3 節）**

$$f(z) = (z - z_0)^{-1/2} \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = (z - z_0)^{1/2} \sum_{n=-1}^{\infty} a_{n+1} (z - z_0)^n \tag{1-4-9}$$

■

■ 1-4-2　常微分方程式の特異点 I（係数特異点）

係数特異点という概念は線形常微分方程式に対して明確に定義できる．すなわち，点 z_1 ($\neq \infty$) の近傍において，最高階の係数 $p_n(z)$ を 1 となるように整理した線形斉次常微分方程式

$$\frac{d^n y(z)}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}y(z)}{dz^{n-1}} + \cdots + p_2(z)\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + p_0(z)y(z) = 0 \tag{1-4-10}$$

の係数関数 $\{p_k(z)\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ がすべて正則であるとき，点 z_1 を微分方程式 (1-4-10) の**通常点**(ordinary point)，また，式 (1-4-10) の係数関数 $\{p_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ のいずれかが正則でない点 z_0 を微分方程式 (1-4-10) の**特異点**(singularity, singular point) と称する．本書ではこの特異点を「常微分方程式の特異点 I (**係数特異点**)」と呼ぶ．

非線形常微分方程式の場合にも，最高階の導関数 $y^{(n)}(z)$ が従属変数 $y(z)$ およびその導関数 $\left\{y^{(k)}(z)\right\}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ の積の和で表現できる場合には，

$$\frac{d^n y(z)}{dz^n} = \prod_k p_k(z) y(z)^{N_0(k)} y'(z)^{N_1(k)} y^{(2)}(z)^{N_2(k)} \cdots y^{(n-1)}(z)^{Nn-1(k)} \tag{1-4-11}$$

その係数関数 $\{p_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots)$ のいずれかが正則でない点 z_0 を微分方程式 (1-4-11) の係数特異点と呼ぶ．たとえば，原点 $(x = 0)$ は非線形常微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} - \frac{2}{\sqrt{x}} y^2(x) = 0 \tag{1-4-12}$$

の係数特異点である．しかし，一般の非線形常微分方程式，たとえば，

$$\frac{dy(x)}{dx} - \frac{y^2(x)}{\sqrt{1 + y(x)}} = 0 \tag{1-4-13}$$

においては,「係数」という概念自体，定義しがたい．

さて，微分方程式の係数特異点は必ずしもその微分方程式の解(関数)の特異点ではない．

例 1　**係数特異点と解の特異点をかねるケース**

原点 $(x = 0)$ は微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} + \frac{2}{x} y(x) = 0 \tag{1-4-14a}$$

の係数特異点であり，かつその解(関数)

$$y(x) = \frac{A}{x^2} \quad (A：定数) \tag{1-4-14b}$$

の特異点である．■

しかし，

例 2　**係数特異点であるが解の特異点でないケース (1)**

原点 $(x = 0)$ は微分方程式

$$\frac{dy(x)}{dx} - \frac{2}{x}y(x) = 0 \qquad \text{(1-4-15a)}$$

の係数特異点であるが，その解

$$y(x) = Ax^2 \quad (A：定数) \qquad \text{(1-4-15b)}$$

の特異点ではない．■

同様に，

例3　係数特異点であるが解の特異点でないケース (2)

原点 $(x = 0)$ は 0 次のベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx} + y(x) = 0 \qquad \text{(1-4-16)}$$

の係数特異点であるが，その解 $J_0(x)$ (図 1-4) の特異点ではない．■

なお 1-5 節で述べるように，線形常微分方程式の解の特異点は微分方程式の係数特異点の集合に含まれるが，非線形常微分方程式ではそれ以外の位置に特異点が自然発生する．

微分方程式の係数特異点 $z_0\ (\neq \infty)$ の近傍で，n 階常微分方程式の一次独立な n 個の解 $\{w_k(x)\}\ \ (k = 1, \ldots, n)$ がすべて**正規解** (regular solutions)，すなわち正則であるかあるいは極ないし (代数的または対数的) 分岐の型の特異性のみをもつ

$$w_k(z) = (z - z_0)^{\alpha_n} \sum_{m=0}^{k-1} [\log(z - z_0)]^m A_{k,m}(z - z_0) \quad (A_{k,m}(z)\ \text{は解析関数}) \qquad \text{(1-4-17)}$$

とき，特異点 z_0 を微分方程式の**正規 (確定) 特異点** (regular singular point) と呼ぶ[*3]．それ以外の場合すなわち，微分方程式の特異点 z_0 が少なくとも一つの解の真性特異点であるとき，特異点 z_0 を微分方程式の**非正規 (不確定) 特異点** (irregular singular point) と呼ぶ．

■ [無限遠点 ∞ の取り扱い]

特異点の分類においてここまで除外しておいた無限遠点は次のように取り扱う．まず，変換

$$z = \frac{1}{t} \qquad \text{(1-4-18)}$$

---

*3 英語の "regular" という単語に「確定」という意味はない．本書では「確定特異点」ではなく「正規解 (regular solutions) をもつ特異点」の意味で「正規特異点」という用語を採用する．

により $z_0 = \infty$ を $t_0 = 0$ に写像する．そのとき，微分演算子はそれぞれ

$$\frac{d}{dz} = -t^2 \frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{dz^2} = t^4 \frac{d^2}{dt^2} + 2t^3 \frac{d}{dt}, \cdots \tag{1-4-19}$$

と変換される．その結果，変換された独立変数 t の微分方程式において点 $t = t_0 = 0$ がどの種類の点（通常点，正規特異点，非正規特異点）に分類されるかに従い，もとの無限遠点 $z_0 = \infty$ を分類する．

例 **2 階線形微分方程式**

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + p_0(z)y(z) = 0 \tag{1-4-20}$$

変換 (1-4-18) により独立変数を t に変換すると，微分方程式 (1-4-20) は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \left[\frac{2}{t} - \frac{p_1(1/t)}{t^2}\right]\frac{dy}{dt} + \frac{p_0(1/t)}{t^4}y = 0 \tag{1-4-21}$$

となる．したがって，

$$p_1(z) = \frac{2}{z} + O(z^{-2}) \qquad z \to \infty \tag{1-4-22a}$$

かつ

$$p_0(z) = O(z^{-4}) \qquad z \to \infty \tag{1-4-22b}$$

であるならば無限遠点 $z = \infty$ は通常点である．無限遠点 $z = \infty$ が正規特異点であるための条件は 2-3 節の結果をもとに演習問題 2-6 で触れる． ■

■ 1-4-3 常微分方程式の特異点 II（存在一意性特異点）

常微分方程式の特異点という述語を**解の存在と一意性**との関連において次の意味で用いる．

独立変数 z と関数 $w(z)$ の組 (z_0, w_0) が常微分方程式

$$\frac{dw}{dz} = f(z, w) \tag{1-4-23}$$

の解の存在と一意性を満たさないとき，すなわち，初期条件 (z_0, w_0) に対応する解が

a) 不連続であるか，

b) 一意的でないか，あるいは

c) 存在しないとき，

独立変数 z と関数 w の組 (z_0, w_0) を常微分方程式 (1-4-23) の特異点と称する．本書ではこの特異点を「常微分方程式の特異点 II」（**存在一意性特異点**）と呼ぶ．

例1　不連続な解

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} \tag{1-4-24}$$

の一般解は，極座標

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta \tag{1-4-25}$$

を用いると

$$r = C\exp\theta \quad (C：定数) \tag{1-4-26}$$

と表される（演習問題 1-1）ので，どの解曲線も原点 (0, 0) を通過しない．つまり初期条件 (0, 0) に対応する解は連続性を満足しないので，原点 (0, 0) は微分方程式 (1-4-24) の存在一意性特異点である．■

例2　一意的でない解

微分方程式

$$\frac{dw}{dz} = \frac{w}{z} \tag{1-4-27}$$

の初期条件 (0, 0) に対応する解は

$$w = Cz \quad (C：すべての実数) \tag{1-4-28}$$

であり一意性を満足しないので，原点 (0, 0) は微分方程式 (1-4-27) の係数特異点であると同時に存在一意性特異点である．■

例3　解が存在せず

微分方程式

$$\frac{dw}{dz} = -\frac{z}{w} \tag{1-4-29}$$

の初期条件 (0, 0) に対応する解は

$$z^2 + w^2 = 0 \tag{1-4-30}$$

であり解曲線は存在しないので，原点 (0, 0) は微分方程式 (1-4-29) の存在一意性特異点である．■

1-5　特異点が踊りだす(非線形微分方程式)

1-1 節〜1-3 節では，微分方程式の**局所**漸近解析のみからその解の**大域的**性質を導き出すことが可能であることをみてきた．これらの例が示すように豊かな果実を収穫しうる局所解析の対象は**臨界点**および**特異点**である．本書では，臨界点および特異点の諸性質を明らかにしてゆくことになるが，まず本節では，非線形常微分方程式の特異点に特有な一つの性質を紹介する．

入力と出力が比例する線形現象は，自然・社会科学現象を過度に単純化・理想化したものであり現実性と面白みに欠ける．非線形現象こそ現実味を帯び，かつ興味をそそる研究対象であり，それを記述する非線形常微分方程式は線形常微分方程式より格段に味わい深い．その特徴が特異点にも現れる．すなわち，非線形微分方程式においては，解の特異点は微分方程式の係数特異点(固定特異点)だけに留まらず自然発生するのである．

1-4-2 項に例示したように，例外はあるものの微分方程式の係数特異点がそのまま解の特異点になることは理解しやすい．このように解の特異点のうち微分方程式の特異点 I (係数特異点)に一致するもの，すなわちその位置が微分方程式のみにより定まるものを**固定特異点**(fixed singularities)と呼ぶ．そして，後に証明するように，線形常微分方程式の解の特異点は固定特異点のみである．

たとえば，係数関数が正則である微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + y = 0 \tag{1-5-1}$$

の一般解

$$y = Ae^{-x} \quad (A：定数) \tag{1-5-2}$$

に特異点は現れない．また，係数関数が特異点 x_0 を有する微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{1}{x - x_0}y = 0 \tag{1-5-3}$$

の一般解

$$y = \frac{A}{x - x_0} \quad (A：定数) \tag{1-5-4}$$

の特異点は係数関数の特異点 x_0 に一致し，これ以外に特異点は存在しない．

ところが，非線形微分方程式の場合には事情が一変する．最も単純な非線形微分方程式の例として，次の 1 階非線形微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0, \quad y(0) = 1 \tag{1-5-5}$$

を採り上げよう．微分方程式 (1-5-5) の係数はすべて定数であり係数特異点は存在しない．しかし，その一般解である関数

$$y(x) = \frac{1}{x-c} \tag{1-5-6}$$

に，特異点すなわち1次の極 $x = c$（定数）が**自然発生**する．一般解 (1-5-6) に初期条件 $y(0) = 1$ を課し積分定数 c を定めると，**特(殊)解**(particular solution)

$$y(x) = \frac{1}{x+1} \tag{1-5-7}$$

を得る．すなわち $x = -1$ が解の特異点(1次の極)である．$x = 0$ における初期条件 $y(0)$ を変更すれば，解に自然発生した特異点 $x = c$ は初期条件 $y(0)$ の値に応じて移動する．つまり，**自然発生特異点**(spontaneous singularities)は**可動特異点**(movable singularities)なのである．

自然発生特異点の例をもう一つあげよう．1階非線形微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = 0, \quad y(0) = 1 \tag{1-5-8}$$

の一般解

$$y(x) = \pm\sqrt{2(x-c)} \tag{1-5-9}$$

には，特異点すなわち**分岐** $x = c$（定数）が自然発生している．一般解 (1-5-9) に初期条件 $y(0) = 1$ を課し，積分定数 c を定めると，特解

$$y(x) = \sqrt{2\left(x + \frac{1}{2}\right)} \tag{1-5-10}$$

を得る．$x = 0$ における初期条件 $y(0)$ を変更すると，解に自然発生した特異点 $x = c$ はやはり $y(0)$ の値に応じて移動する．

非線形常微分方程式においては，その解の特異点が固定特異点のみに留まらず，自然発生し，さらに初期(境界)条件に依存して**踊りだす**のである．本節の以下の部分では，非線形常微分方程式に自然発生特異点(可動特異点)が出現する機構を考察する．

それに先立ち，線形微分方程式

$$\frac{d^n y(x)}{dx^n} + p_{n-1}(x)\frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}} + \cdots + p_2(x)\frac{d^2 y(x)}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy(x)}{dx} + p_0(x)y(x) = 0 \tag{1-5-11}$$

の解の特異点は微分方程式の特異点I，すなわち固定特異点だけに限定されることを指摘しておこう．つまり，線形微分方程式でさえあればその係数関数 $p_0(x), p_1(x), p_2(x)\cdots,$ $p_{n-1}(x)$ がいかに複雑であっても，その解の特異点は係数関数 $\{p_j(x)\}$, $(j = 0,\ldots,n-1)$ の特異点の集合に含まれ，それ以外に自然発生することはない．

ここまで式 (1-5-5) あるいは (1-5-8) のような初歩的な非線形微分方程式に容易に可動特異点が自然発生するのを見てくると，線形微分方程式に自然発生特異点が存在しない方がむしろ不思議に感ずるかもしれない．ここで，その理由を考えてみよう．

直観的に理解しようとするならば，こうなるだろう．微分方程式の解 $y(x)$ はその特異点の近傍で特異性(singularity)をもつ，すなわち発散するのだが，解の微分 $y'(x)$ は解 $y(x)$ 自身より強い特異性をもち，より速く発散する．

すなわち，極の場合には

$$y(x) \sim \frac{1}{(x-c)^a} \ll y'(x) \sim \frac{-a}{(x-c)^{a+1}} \quad (a > 0\text{：定数}) \qquad x \to c \tag{1-5-12}$$

であり，真性特異点の場合にはたとえば，

$$y(x) \sim \exp\frac{1}{(x-c)} \ll y'(x) \sim \frac{-1}{(x-c)^2}\exp\frac{1}{(x-c)} \qquad x \to c \tag{1-5-13}$$

である．このように特異点の近傍では，一般に高階の微分ほど強い特異性をもち，より速く発散する．

したがって，線形微分方程式 (1-5-11) においてその最高階の微分 $y^{(n)}(x)$ は，より低い階の微分 $y^{(n-k)}(x), k > 0$ のみとつりあう(**卓越平衡**)ことはできず，係数関数 $p_{n-k}(x)$ $(k = 1, \cdots, n)$ の特異点においてのみ，係数関数と低い階の微分 $y^{(n-k)}(x)$ $(k = 1, \cdots, n)$ の積とつりあう可能性があるのである．

例 1　ベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2} + \frac{1}{x}\frac{dy(x)}{dx} + \left(1 - \frac{\nu^2}{x^2}\right)y(x) = 0 \tag{A-1}$$

の係数特異点近傍において $(x \to 0)$，$y'(x)$ ないし $y(x)$ 単独では 2 階微分 $y''(x)$ とつりあうことができず，特異性をもつ係数とそれらの積 $y'(x)/x$ ないし $y(x)/x^2$ が初めて $y''(x)$ とつりあうことができるのである．■

一方，非線形微分方程式では各項に $y(x), y'(x)$ などが自由に配置されているので，係数の特異点以外の点 x においても最高階の微分 $y^{(n)}(x)$ とつりあうべき項は現れうる．

例 2　非線形微分方程式 I

$$\frac{dy}{dx} + y^2 = 0 \tag{1-5-5 再掲}$$

の 2 項は，解

$$y(x) = \frac{1}{x-c} \quad (c\text{：定数}) \tag{1-5-6 再掲}$$

により $x \to c$ でつりあう．また，■

例3　**非線形微分方程式 II**

$$\frac{dy}{dx} - \frac{1}{y} = 0 \tag{1-5-8 再掲}$$

の2項は，解

$$y(x) = \pm\sqrt{2(x-c)} \quad (c：定数) \tag{1-5-9 再掲}$$

により，$x \to c$ でつりあう．■

なお，厳密に証明するならば，**解の存在と一意性の定理**（5-3節）に言及する必要がある．1階常微分方程式の初期値問題 $y' = F(x, y)$，$y(x_0) = y_0$ は，点 (x_0, y_0) を含む閉領域 D 内で関数 $F(x, y)$ が1価連続であり，かつ，リプシッツ（Lipschitz）条件

$$|F(x, y_1) - F(x, y_2)| < K\,|y_1 - y_2| \quad (K：定数), \qquad \forall(x, y_1), (x, y_2) \in D \tag{5-3-2a}$$

$$\left(F(x, y)\text{ が微分可能であれば，}\left|\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}\right| < K \quad (K：定数)\right) \tag{5-3-2b}$$

を満足するとき，連続関数の一意的な解 $y(x)$ をもつ（5-3節）．

また，n 階常微分方程式は1階連立常微分方程式に置き換えられる．この実数関数が1価連続かつ，リプシッツ条件を満たすという条件が，複素関数では係数が正則であること，に置き換えられる．それゆえ，すべての係数関数が正則である「微分方程式の通常点」においては，解の存在と一意性の定理により，1価正則なる解が存在する．したがって，線形微分方程式の解の特異点は微分方程式の特異点以外に存在しないのである．

1-6　特異点を通過する（乗り越える）数値計算 ［第1種パンルヴェ超越関数］

前節までとやや趣きを変え，局所漸近解析の重要な対象である特異点近傍で数値解を求める数値解析（数値計算）に触れておこう．特異点に対するアレルギーを少しばかり有する読者がいたとしても，特異点が数値解析の対象たりうることを知るならば特異点に親近感をいだくことができるだろう．

実用上の問題で遭遇する複雑な微分方程式の解を求めるほとんどの場合において，最終的には数値計算に頼らざるをえない．その数値計算では，微分方程式の微分演算子を差分演算子で置き換える（近似する）ことになる．これは有限要素法など差分法以

外の方法を用いる場合にも本質的に同様である．

その際，微分方程式の解の特異点付近において，微分方程式の解である関数そのものまたは(および)その導関数が発散するので，特異点を含む区間(2次元の場合，領域)にまで数値計算範囲を拡大することは，一見すると困難である．もしそうであるならば，解が特異点をもつ微分方程式の数値解を求めるためには，独立変数の定義域を特異点を含まないいくつかの小区間に分割し，それぞれの区間において別個に初期(境界)条件を与えて解を求めなければならないことになる．それでは，n 階常微分方程式の特解は n 個の境界条件により確定する(特に1階常微分方程式の解は唯一の初期条件により決定される)，という基本定理に矛盾することになる．具体例を見つつ考えてゆこう．

■ ［正接関数 $y = \tan(x + c)$］

1階非線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \tag{1-6-1}$$

の一般解は，正接関数(タンジェント)

$$y = \tan(x + c) \quad (c：定数) \tag{1-6-2}$$

である．微分方程式 (1-6-1) は係数特異点をもたないが，その解である関数 (1-6-2) は，

$$x_n = -c + \left(n + \frac{1}{2}\right)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

に可付番無限個の特異点(1次の極)を有する．なお，積分定数 c は個々の初期条件 (x_0, y_0) ごとに

$$c = -x_0 + \arctan y_0 \tag{1-6-3}$$

と定まる(変化する)ので，これら無限個の特異点はすべて可動特異点である．特に，初期条件 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ に対応する特解が，いわゆる正接関数

$$y = \tan x \tag{1-6-2a}$$

である(図1-9)．

さてここで仮に，初期条件 $(x_0, y_0) = (0, 0)$ を満たす1階非線形常微分方程式 (1-6-1) の解 $y = \tan x$ (1-6-2a) が求められておらず，その解の性質を明らかにするためにさまざまな解析を行ったのち，最後に数値計算に頼らざるを得なくなった場合を想定しよう．

式 (1-6-1) の右辺が正定値であるゆえ，解は定義域の実数全体にわたり(区分的に)

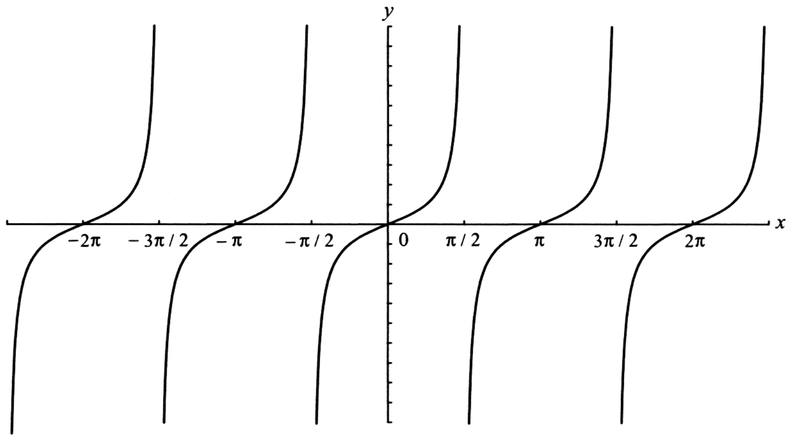


図 1-9　可付番無限個の特異点(1 次の極)をもつ正接関数 $y = \tan x$

単調増加関数である．その単調増加性自体が特異点の存在を示唆しているので，まず，特異点(極) x_0 の存在を確かめてみよう．すなわち，極 x_0 の近傍で解の主要部が

$$y(x) \sim \frac{C}{(x - x_0)^n} \quad (n > 0, C：定数) \qquad x \to x_0 \tag{1-6-4}$$

であると仮定する．これを式 (1-6-1) に代入し，左辺と右辺第 1 項が卓越平衡にあることに注意すると，

$$\frac{-nC}{(x - x_0)^{n+1}} \sim \frac{C^2}{(x - x_0)^{2n}} \qquad x \to x_0 \tag{1-6-5}$$

を得るので，ただちに極の次数

$$n = 1$$

および係数

$$C = -1$$

が定まる．すなわち，解の特異点 x_0 は 1 次の極である．

$$y(x) \sim \frac{-1}{x - x_0} \qquad x \to x_0 \tag{1-6-6}$$

なお，微分方程式 (1-6-1) が非線形であるため，極の次数のみならず同時に係数 C も決定されることに注意されたい．

実際，特異点 $x_0 = x_n = (n + 1/2)\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ の近傍において，厳密解である正接関数は

$$y = \tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\cos[x-(n+1/2)\pi]}{-\sin[x-(n+1/2)\pi]} \sim \frac{-1}{x-(n+1/2)\pi}$$

$$x \to x_n = \left(n+\frac{1}{2}\right)\pi \qquad (1\text{-}6\text{-}7)$$

であるから，特異点 x_n はすべて 1 次の極であり，係数 $C=-1$ である．

再び数値解析にもどることにしよう．これらの特異点において解は発散するので，特異点を通過して数値計算を継続することは一見不可能であり，現に初期条件を与えた原点から出発し，最初に遭遇する特異点(極) $x_1=\pi/2$ にどれだけ近づくことができるか？という努力がなされている [12].

一方，解析的には唯一の初期条件 $(x_0, y_0)=(0,0)$ を課すことにより 1 階非線形常微分方程式 (1-6-1) の厳密解が独立変数 x の定義域である実数全体にわたり定まるのであるから，数値計算においても唯一の初期条件 $(x_0, y_0)=(0,0)$ を課すことにより実数全体にわたる解が定まるべきであり，近似的であるにせよ，同じ方程式を解く数値解析において,「隣接する二つの特異点に挟まれた可付番無限個の小区間それぞれで初期条件を与えなければ解を得られない」というのは不合理である．

実際，微分方程式 (1-6-1) の解の特異点が 1 次の極であることを考慮して，変数変換

$$y = \frac{1}{z} \qquad (1\text{-}6\text{-}8)$$

を施すと，微分方程式 (1-6-1) は

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + 1 = 0 \qquad (1\text{-}6\text{-}9)$$

に移り，解 y の特異点 $x_n=(n+1/2)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\cdots.)$ は，変換された微分方程式 (1-6-9) の解

$$z = \cot x \qquad (1\text{-}6\text{-}10)$$

の通常点に変換される．したがって，数値計算を実施するにあたり，原点から出発し微分方程式 (1-6-1) の解を求めてゆき，特異点

$$x_n = (n+1/2)\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

に近づくたびに(たとえば $x=(n+1/4)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$，図 1-10 中○印において) 等価な微分方程式 (1-6-9) にスイッチし，次に $z=\cot x$ の特異点

$$x = n\pi \quad (n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$$

に近づいたとき(たとえば $x=(n+3/4)\pi$ $(n=0,\pm1,\pm2,\ldots)$，図中×印において)，再び微分方程式 (1-6-1) にもどることを繰り返すことにより (図 1-10)，容易にもとの微分方程式 (1-6-1) の特異点を通過して(乗り越えて)独立変数 x の定義域である実数全体にわたり数値計算を継続することができる．

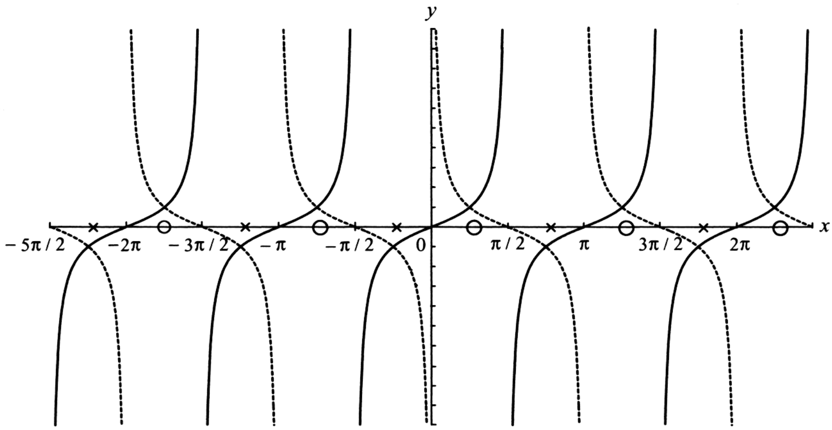


図 1-10　正接関数(実線)の特異点を通過する数値計算(点線は $y = \cot x$)

■ **[微分方程式の特異点と通常点の変換]**

上の例に見るように，微分方程式の特異点と通常点は変数変換により互いに移り変わる．これを利用して，微分方程式の特異点を通過する(乗り越える)数値計算がしばしば可能となる．

例 1　**独立変数の変換**

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0 \tag{1-6-11a}$$

の特異点 I (係数特異点) $x = 0$ は独立変数に変換

$$t = \sqrt{x} \tag{1-6-12}$$

を施すと，変換された微分方程式

$$\frac{dy}{dt} + 2y = 0 \tag{1-6-11b}$$

の通常点 $t = 0$ となる．なお，微分方程式 (1-6-11a) の係数特異点 $x = 0$ はその解

$$y = A\exp(-2\sqrt{x}) \quad (A：定数) \tag{1-6-13}$$

の特異点(分岐)にもなっている．■

例 2　**従属変数の変換**

微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y=0 \qquad \text{(1-6-14a)}$$

の特異点 I (係数特異点) $x=0$ は従属変数に変換

$$y=\frac{z}{x} \qquad \text{(1-6-15)}$$

を施すと，変換された微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2}+z=0 \qquad \text{(1-6-14b)}$$

の通常点 $x=0$ となる．なお，微分方程式 (1-6-14a) の係数特異点 $x=0$ はその解

$$y=\frac{A\exp(ix)+B\exp(-ix)}{x} \quad (A,B：\text{定数}) \qquad \text{(1-6-16)}$$

の特異点(極)にもなっている．■

■ [第1種パンルヴェ超越関数]

パンルヴェ (Paul Painlevé, 1863-1933) は2階常微分方程式

$$\frac{d^2y}{dz^2}=F\left(y,\frac{dy}{dz},z\right) \qquad \text{(1-6-17)}$$

のうち，$F(y,dy/dz,z)$ が独立変数 z に関して解析的であり，従属変数 y とその1階導関数 dy/dz に関して有理関数であるもののうち，解の可動特異点が存在しないかあるいは存在した場合にも極の可動特異点に限る*4，という条件を満たす方程式が，本質的に 50 の型に分類できることを示した*5 ([6])．

これら 50 型の2階常微分方程式のうち 44 型は，初等関数および特殊関数によりその解を表現することができるが，残りの6型 (1-6-18〜23) の解は新種の超越関数であり，これらを**パンルヴェ超越関数** (Painlevé transcendents) と呼ぶ．

$$\frac{d^2y}{dx^2}=6y^2+x \qquad \text{(1-6-18)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2y^3+xy+\alpha \qquad \text{(1-6-19)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{1}{x}\left(-\frac{dy}{dx}+\alpha y^2+\beta\right)+\gamma y^3+\frac{\delta}{y} \qquad \text{(1-6-20)}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{1}{2y}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+\frac{3}{2}y^3+4xy^2+2(x^2-\alpha)y+\frac{\beta}{y} \qquad \text{(1-6-21)}$$

*4 真性特異点および分岐である可動特異点を臨界点 (critical points) と称する文献がある ([6]：本書 1-3 節および第3章の定義と異なることに注意)．パンルヴェはこの意味の臨界点を除外した．

*5 このような偉大な業績を残した数学者が，その後三度フランス共和国の首相に就任した．映画俳優が州知事・大統領になり，虚構をあやつる小説家や一介のお笑い芸人が都道府県知事になるのは 20 世紀以降では珍しくないマスメディアによる狂想曲と解釈できるが，数学者の首相就任は他に例をみない珍奇な歴史的事跡である．

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \frac{1}{x}\frac{dy}{dx} + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left[\alpha y + \frac{\beta}{y}\right] + \frac{\gamma y}{x} + \frac{\delta y(y+1)}{y-1} \quad (1\text{-}6\text{-}22)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right]\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left[\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right]\frac{dy}{dx}$$
$$+ \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left[\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \frac{\gamma(x-1)}{(y-1)^2} + \frac{\delta x(x-1)}{(y-x)^2}\right] \quad (1\text{-}6\text{-}23)$$

ここに，$\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は定数である．

以下で，その第 1 型である第 1 種パンルヴェ方程式 (1-6-18) とその解である第 1 種パンルヴェ超越関数を考察する．微分方程式 (1-6-18) の解曲線は，左（x 軸の負方向）に開いた放物線 $6y^2 + x = 0$ の上下および右側，すなわち式 (1-6-18) の右辺が正の領域 $6y^2 + x > 0$ では下に凸であり，左側 $6y^2 + x < 0$ では上に凸である（図 1-11）．この特徴は，放物線 $6y^2 + x = 0$ の上および右側で解が $+\infty$ に発散する可能性すなわち，特異点の存在を示唆している．

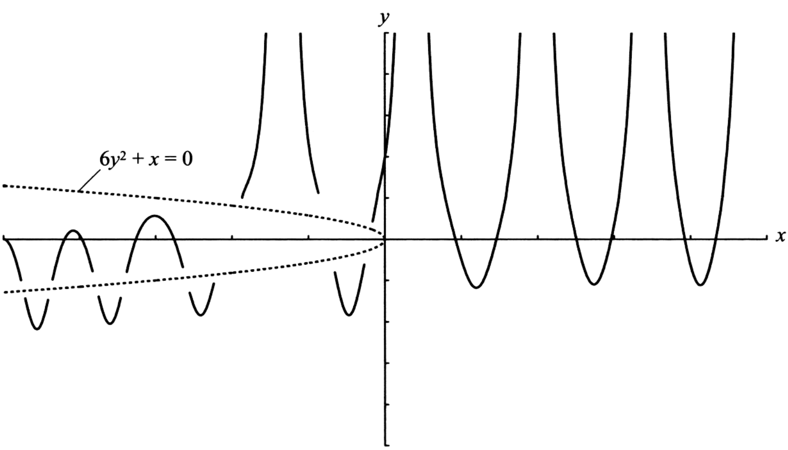


図 1-11　第 1 種パンルヴェ超越関数の凹凸

第 1 種パンルヴェ超越関数の詳しい局所漸近解析は 5-4 節にゆずり，本節では実際にその特異点を通過して数値計算を継続する方法に集中する．まず，解曲線が下に凸である領域において，解が $+\infty$ に発散する特異点（極）x_0 の存在の可能性を探ってみよう．すなわち，極 x_0 が存在し，その近傍で解の主要部が

$$y(x) \sim \frac{C}{(x-x_0)^n} \quad (n > 0, C：定数) \qquad x \to x_0 \qquad (1\text{-}6\text{-}4 再掲)$$

であると仮定する．これを式 (1-6-18) に代入すると，

$$\frac{n(n+1)C}{(x-x_0)^{n+2}} \sim \frac{6C^2}{(x-x_0)^{2n}} \qquad x \to x_0 \tag{1-6-24}$$

を得るので，ただちに極の次数 $n=2$ および係数 $C=1$ が定まる．

すなわち，特異点 I（係数特異点）を有しない第1種パンルヴェ方程式 (1-6-18) の解・第1種パンルヴェ超越関数の特異点は可動特異点であり，2次の極である．5-4 節で明らかになるように，この特異点は正の実軸上に可付番無限個存在する．

そこで，解を極 x_0 の近傍でローラン級数展開し，

$$y = \frac{1}{(x-x_0)^2} + \sum_{k=-1}^{\infty} a_k (x-x_0)^k \tag{1-6-25}$$

これを微分方程式 (1-6-18) に代入すると，

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{(x-x_0)^4} + \frac{2a_{-1}}{(x-x_0)^3} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)a_k(x-x_0)^{k-2} \\
&= x + \frac{6}{(x-x_0)^4} + 12\sum_{k=-1}^{\infty} a_k(x-x_0)^{k-2} + 6\sum_{k=-1}^{\infty} a_k^2(x-x_0)^{2k} \\
&\quad + 6\sum_{k=-1(k\neq l)}^{\infty} a_k \sum_{l=-1}^{\infty} a_l (x-x_0)^{k+l}
\end{aligned} \tag{1-6-26a}$$

すなわち，

$$\begin{aligned}
&\frac{6}{(x-x_0)^4} + \frac{2a_{-1}}{(x-x_0)^3} + 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 \\
&\quad + 20a_5(x-x_0)^3 + 30a_6(x-x_0)^4 + o(x-x_0)^4 \\
&= x + \frac{6}{(x-x_0)^4} + 12\left(\frac{a_{-1}}{(x-x_0)^3} + \frac{a_0}{(x-x_0)^2} + \frac{a_1}{x-x_0} + a_2 + a_3(x-x_0) + a_4(x-x_0)^2\right. \\
&\qquad \left. + a_5(x-x_0)^3 + a_6(x-x_0)^4 + o(x-x_0)^4\right) \\
&\quad + 6\left(\frac{a_{-1}^2}{(x-x_0)^2} + a_0^2 + a_1^2(x-x_0)^2 + a_2^2(x-x_0)^4 + a_3^2(x-x_0)^6 + a_4^2(x-x_0)^8 + a_5^2(x-x_0)^{10}\right. \\
&\qquad \left. + a_6^2(x-x_0)^{12} + o(x-x_0)^{12}\right) \\
&\quad + 12\left(\frac{a_{-1}a_0}{x-x_0} + (a_{-1}a_2 + a_0a_1)(x-x_0) + (a_{-1}a_3 + a_0a_2)(x-x_0)^2\right. \\
&\qquad + (a_{-1}a_4 + a_0a_3 + a_1a_2)(x-x_0)^3 + (a_{-1}a_5 + a_0a_4 + a_1a_3)(x-x_0)^4 \\
&\qquad + (a_{-1}a_6 + a_0a_5 + a_1a_4 + a_2a_3)(x-x_0)^5 \\
&\qquad \left. + (a_{-1}a_7 + a_0a_6 + a_1a_5 + a_2a_4)(x-x_0)^6 + o(x-x_0)^6\right) \qquad x \to x_0
\end{aligned} \tag{1-6-26b}$$

を得る．ここで，両辺の $(x-x_0)$ の同じベキの項の係数を等置すると，

$$a_{-1}=a_0=a_1=0,\quad a_2=-\frac{x_0}{10},\quad a_3=-\frac{1}{6},\quad a_4=\text{任意},$$

$$a_5=0,\quad a_6=\frac{x_0^2}{300},\cdots\cdots$$

すなわち，

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{(x-x_0)^2}-\frac{x_0}{10}(x-x_0)^2-\frac{1}{6}(x-x_0)^3+a_4(x-x_0)^4+\frac{x_0^2}{300}(x-x_0)^6+o(x-x_0)^6 \\ &= \frac{1}{(x-x_0)^2}-\frac{x}{10}(x-x_0)^2-\frac{1}{15}(x-x_0)^3+a_4(x-x_0)^4+\frac{x_0^2}{300}(x-x_0)^6+o(x-x_0)^6 \\ &\qquad x\to x_0 \qquad (1\text{-}6\text{-}27)\end{aligned}$$

を得る．これを微分すると，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{(x-x_0)^3}-\frac{x}{5}(x-x_0)-\frac{3}{10}(x-x_0)^2+4a_4(x-x_0)^3+\frac{x_0^2}{50}(x-x_0)^5+o(x-x_0)^5$$

$$x\to x_0 \qquad (1\text{-}6\text{-}28)$$

を得る．さらに，解の特異点が 2 次の極である（式 (1-6-25)）ことに鑑み，従属変数を

$$y=\frac{1}{v^2} \qquad (1\text{-}6\text{-}29)$$

と変換し，式 (1-6-27, 28) から $(x-x_0)$ を消去すると，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{v^3}-\frac{xv}{2}-\frac{v^2}{2}+7a_4v^3+o(v^3) \qquad x\to x_0 \qquad (1\text{-}6\text{-}30)$$

を得る（演習問題 1-3）．そこで，新たに従属変数 u を導入し

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{v^3}-\frac{xv}{2}-\frac{v^2}{2}+uv^3 \qquad (1\text{-}6\text{-}31)$$

とおく．また，式 (1-6-29) より，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{2}{v^3}\frac{dv}{dx} \qquad (1\text{-}6\text{-}32)$$

を得るので，これと式 (1-6-31) より，

$$\frac{dv}{dx}=1+\frac{v^4}{4}\left(x+v-2uv^2\right) \qquad (1\text{-}6\text{-}33)$$

を得る．さらに，式 (1-6-18, 31, 33) より，

$$\frac{du}{dx}=\frac{xv}{8}(x+3v)+\left(\frac{1}{4}-xu-\frac{5uv}{4}+\frac{3u^2v^2}{2}\right)v^3 \qquad (1\text{-}6\text{-}34)$$

を得る（演習問題 1-4）．こうして，2 階微分方程式 (1-6-18) と等価な u，v を従属変数とする連立 1 階微分方程式 (1-6-33, 34) を導くことができた．

そこで，特異点（2 次の極）x_0 から離れた区間では，式 (1-6-18) とやはり等価な連立 1 階微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = z \tag{1-6-35}$$

$$\frac{dz}{dx} = 6y^2 + x \tag{1-6-36}$$

を用い，特異点 x_0 に近づいたとき連立微分方程式 (1-6-33, 34) に移ることにより，もとの微分方程式 (1-6-18) の特異点 x_0 を通過して（乗り越えて）数値計算を続けることが可能になる．

変数 y, z から変数 u, v にスイッチするときの初期条件は，式 (1-6-29, 31) より，

$$v = -\frac{1}{\sqrt{y}} \tag{1-6-37}$$

$$u = \frac{z}{v^3} + \frac{2}{v^6} + \frac{x}{2v^2} + \frac{1}{2v} \tag{1-6-38}$$

となる．

以上の方法により，原点において初期条件 $y(0) = 0$，$dy/dx(x = 0) = 0$ を与えた特解の数値計算結果を図 1-12 に示す．確かに放物線 $6y^2 + x = 0$ の右側に特異点が存在している．

なお，本節の数値解ほか数例を 5-4 節で検証する．

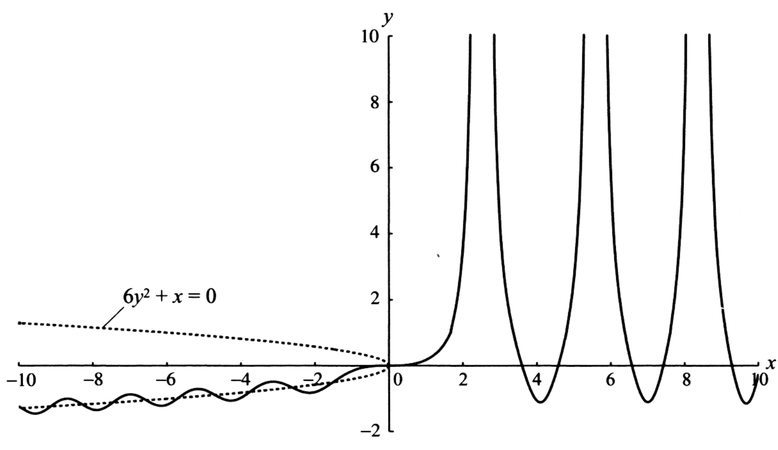


図 1-12　第 1 種パンルヴェ超越関数の特異点を通過する数値計算
（初期条件 $y(0) = 0$，$dy/dx(x = 0) = 0$）

1-7　特異解（存在一意性特異点の集合）

微分方程式の局所漸近解析の主役である特異点に関する議論を完結するためには，微分方程式の**特異解**（singular solutions）にふれておかねばならない．なぜならば，第 4

章で詳述するように特異解は特異点の集合だからである．本節では二つの有名な特異解の例を紹介する．

特異解を議論するのに先立ち，まず微分方程式の**一般解**(general solutions)を定義しておこう．常微分方程式

$$F(x, y, y', y'', y^{(3)} \cdots, y^{(n)}) = 0 \tag{1-7-1}$$

を満たす関数 $y(x)$ のうち，階数 n に等しい個数の独立な積分定数を有するもの

$$y = f(x, c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n) \quad (c_1, c_2, c_3, \cdots, c_n：定数) \tag{1-7-2}$$

を微分方程式 (1-7-1) の一般解と呼ぶ．

■ [重力場における質点の運動]

高校生がおそらく最初に出会う微分方程式，すなわち1次元の自由落下運動の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -g \quad (g：重力加速度) \tag{1-7-3}$$

を考えよう．y は鉛直上向きの座標，x は時間，$g = 9.8\ \mathrm{m/s^2}$ は重力加速度である．言うまでもなく，微分方程式 (1-7-3) は重力場における自由落下運動という現象を記述する物理法則の数学的表現である．微分方程式 (1-7-3) の一般解は

$$y = C_1 + C_2 x - \frac{g}{2}x^2 \tag{1-7-4}$$

であり，初位置 C_1 および初速度 C_2 という力学的にも明確な意味をもつ独立な積分定数二つを有する．これら二つの積分定数(初位置 C_1 および初速度 C_2)に個々の現象に対応する数値を代入すると，**特(殊)解**，力学的にはその初期条件に対応する個々の軌道を得る．

重力場において自由落下する物体の軌道はすべて式 (1-7-4) に従うのであるから，一般解 (1-7-4) は線形微分方程式 (1-7-3) ひいては，重力場における質点の運動の物理法則と等価である，といえる．

ところが，非線形微分方程式の中には，その一般解に含まれる積分定数をどのように選んでも表現することのできない，一般解と独立な解すなわち**特異解**が出現することがある．

■ [小孔からの漏水]

身近に現れる特異解の例として，上面を開放した容器(表面積 S)に貯水されている

水が底面付近に開けられた小孔(断面積 s)からゆっくり流出する現象を考えよう(図 1-13)．水が小孔からゆっくり流出する現象を定常流と近似し，小孔でのエネルギー損失を無視すると，その流線に沿ってエネルギー保存則・ベルヌイ(Bernoulli)の式

$$p + \rho g z + \frac{1}{2}\rho v^2 = 一定 \tag{1-7-5}$$

が成り立つ．ここに，z は容器底面を基準とし上方を正とする鉛直座標，p，ρ，v はそれぞれ水の圧力，密度および流速，g は重力加速度である([5] 第 7 章)．

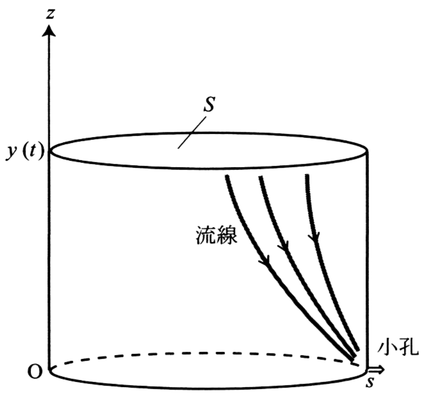


図 1-13 上面を開放した容器の小孔からの漏水

容器の表面積 S は小孔の断面積 s に比べて十分大きいので容器の水面における流速を無視できる($v \cong 0$)．同一流線の上端である容器の水面(標高 $z = y$，流速 $v = 0$)と下端である孔(標高 $z = 0$，流速 $v = v$)において式 (1-7-5) の左辺をそれぞれ評価し，等値すると，圧力はいずれも大気圧 p_0 に等しいので，

$$p_0 + \rho g y + \frac{1}{2}\rho \cdot 0^2 = p_0 + \rho g \cdot 0 + \frac{1}{2}\rho v^2 \tag{1-7-6}$$

を得る．また，水の質量保存則(連続の式)

$$-S\frac{dy}{dt} = sv \tag{1-7-7}$$

が成り立つ．ここに，t は時間である．式 (1-7-6, 7) から流速 v を消去すると

$$\frac{dy}{dt} = -\frac{s\sqrt{2g}}{S}\sqrt{y} \tag{1-7-8}$$

を得る．さらに，変数 t を

$$x = \frac{s\sqrt{2g}}{S}t \tag{1-7-9}$$

に変換すると，微分方程式 (1-7-8) は

$$\frac{dy}{dx} = -\sqrt{y} \tag{1-7-10}$$

となる．これは，式 (1-7-9) で規格化された時刻 x における，規格化された水面下降率 $-dy/dx$ を与える式である．

微分方程式 (1-7-10) は非線形であるが変数分離形なのでただちに積分でき，

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y}} = -\int dx$$

すなわち，

$$2\sqrt{y} = -x + C$$

あるいは

$$y = \frac{(-x+C)^2}{4} \quad (x \leq C) \quad (C：定数) \tag{1-7-11}$$

を得る（図 1-14）．

1 階の微分方程式 (1-7-10) の解 (1-7-11) は積分定数 C を一つ有するので一般解である．通常は，一般解に含まれる積分定数を適当に選択することにより，微分方程式 (1-7-1) の任意の初期条件に対応するあらゆる解（特解）を得ることができる．ところが，微分方程式 (1-7-10) には，自明な解

$$y = 0 \tag{1-7-12}$$

が存在する．これは一般解 (1-7-11) 中の積分定数 C をどのように選んでも表現するこ

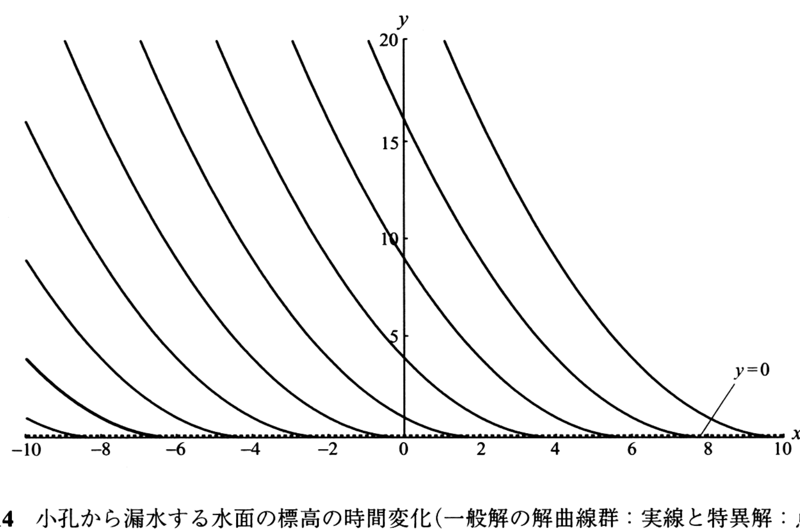


図 1-14　小孔から漏水する水面の標高の時間変化（一般解の解曲線群：実線と特異解：点線）

とのできない解，すなわち特異解である（図 1-14 の x 軸：点線）．つまり，時刻 $x = x_0$ において水位 $y = 0$ であるという初期条件を与え，過去 $x < x_0$ に向けて微分方程式を解こうとすると,「水位が次第に減少してきた結果ちょうど時刻 $x = x_0$ で水位が $y = 0$ になった」という解と「以前からずっと空（$y = 0$）であった」という二つの解が存在する，すなわち，特異点 $(x, y) = (x_0, 0)$ においては解の一意性が成立しないことを意味している．なお，特異解曲線 (1-7-12) は一般解 (1-7-11) を表す曲線群の**包絡線**（envelope）である．

特異解をもつ微分方程式をもう一つあげる．

■［クレローの微分方程式］

クレロー（Clairaut）の微分方程式

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{dy/dx} \tag{1-7-13}$$

は，特異解の例題として必ず現れるほど有名な微分方程式である．ここで，そのすべての解を求めてみよう．微分方程式 (1-7-13) を x で微分すると，

$$\left[x + \frac{1}{(dy/dx)^2}\right]\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \tag{1-7-14}$$

を得るので，微分方程式 (1-7-13) の解は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx} = C \quad (C：定数) \tag{1-7-15}$$

または,

$$x + \frac{1}{(dy/dx)^2} = 0$$

すなわち,

$$\frac{dy}{dx} = \pm\frac{1}{\sqrt{-x}} \tag{1-7-16}$$

を満たさなければならない．

式 (1-7-15) を (1-7-13) に代入すると一般解

$$y = Cx - \frac{1}{C} \tag{1-7-17}$$

を得る（図 1-15 実線）．

一方，式 (1-7-16) を (1-7-13) に代入すると，

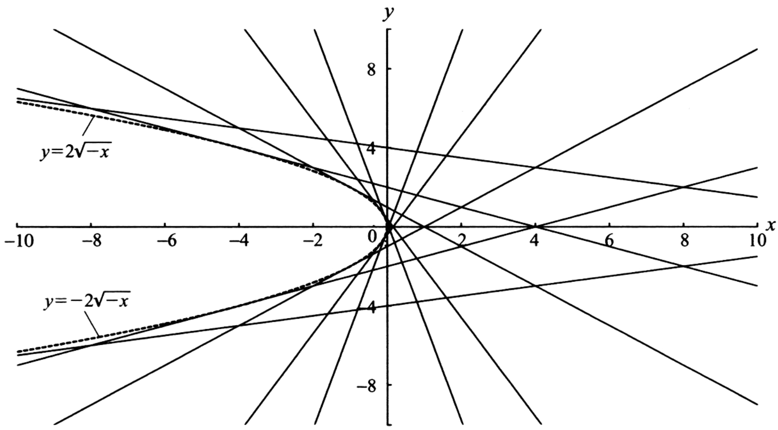


図 1-15　クレローの微分方程式の解曲線群（実線：一般解，点線：特異解）

$$y = \mp 2\sqrt{-x} \tag{1-7-18}$$

を得るが，これは一般解 (1-7-17) に含まれる積分定数 C をどのように選んでも表すことのできない独立の解，すなわち特異解である（図 1-15：点線）．この例題においても特異解 (1-7-18) は一般解 (1-7-17) を表す曲線群の包絡線である．

微分方程式の一般解を得て一安心したのも束の間，実はまだ特異解が隠れている可能性がある，というのでは読者も居心地が悪いに違いない．そこで，第 4 章では特異解の多様な例を観察しつつそれらが現れる原因とその存在条件を明らかにする．

第 1 章の演習問題

1-1　微分方程式 (1-4-24) の一般解は極座標を用いて式 (1-4-26) と表されることを示せ．

1-2　1 階非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \tag{1-6-1}$$

の特異点近傍におけるローラン級数展開の第 2 項を求めよ．

1-3　従属変数を $y = 1/v^2$ (1-6-29) と変換し，式 (1-6-27, 28) から $(x - x_0)$ を消去すると微分方程式 (1-6-30) を得ることを示せ．

1-4　微分方程式 (1-6-18, 31, 33) より (1-6-34) を導け

第2章

線形常微分方程式の係数特異点とそのまわりの局所漸近解析

三角関数は初等関数に分類される，と聞いた高校生は一様に不満げな表情を見せる．三角関数は高等学校で学ぶ立派な高等数学の対象のはずだ，三角関数が初等関数だとするとそれまで苦労して学んできた（無理関数を含む）代数関数はすべて「幼稚園関数」になってしまうではないか，といわんばかりに．しかし，「y が変数 x の関数である」ことは「変数 x の値に対応する変数 y の値を決定する規則が存在する」いう普遍的概念であるから，独立変数 x に値を直接代入するだけで関数 y の値を算出できる代数関数は「ごく幼稚な関数」という評価に甘んじねばならないだろう．三角関数 $\sin x$ こそが，関数の意味を知らなければ独立変数 x に値を代入してもその関数の値を算出できない「本格的な関数」の最初の例なのである．それゆえに三角関数で数学につまずくケースも多く，「小学校（初等）関数」をマスターできないことが原因で理系への進学をあきらめる，という図式も発生しかねない．

三角関数・指数関数などの初等関数に習熟した理工系あるいは経済学・統計学などを専攻する学生は，次にベッセル関数，ガンマ関数などの特殊関数に出会う．特殊関数の多くは有理関数の係数を有する 2 階線形常微分方程式の解である．たとえば，エィリーの微分方程式（5-6 節）

$$y'' = xy \tag{B-1}$$

の二つの独立な解は，第 1 種エィリー関数 $Ai(z)$ および第 2 種エィリー関数 $Bi(z)$ である．しかし，エィリー関数に特に習熟しているわけではない学生・研究者にとっては，「微分方程式 (B-1) を解き，解 $Ai(z)$ および $Bi(z)$ を得た」といわれたとしても，単に微分方程式 (B-1) の解をエィリー関数 $Ai(z)$ および $Bi(z)$ と定義しただけであり，微分方程式 (B-1) の解に関する情報が増したことにはならないだろう．つまり，特殊関数の

専門家ではない一般研究者・技術者にとり，微分方程式の解の性質を明らかにするためには解を初等関数で表現する必要がある．特異点まわりの局所漸近解析はそのための標準的手法となるのである．

エィリーの微分方程式の例では，その非正規特異点 $x = +\infty$ まわりの局所漸近解析を行うことにより (2-4 節)，解 $Ai(z)$ および $Bi(z)$ の $x \to +\infty$ における振る舞いが

$$\begin{aligned} Ai(x) &\sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad x \to +\infty \\ Bi(x) &\sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad x \to +\infty \end{aligned} \tag{B-3}$$

であることを知ることができる．

本書を読み進むにつれていよいよ明らかになるように，常微分方程式およびその解の特徴は特異点に現れる．そして，線形常微分方程式に関する限り，その特異点に関する理論はフクス (Fuchs) により完成されている．本章ではフクスの成果を解説し，それぞれの型の特異点近傍における局所漸近解析法を説明する．具体的には，通常点まわりではテイラー級数展開，正規特異点まわりではフロベニウス級数展開，そして非正規特異点まわりでは漸近級数展開を用いる．

2-1　係数特異点の分類

最高階の係数 $p_n(z)$ を 1 となるように整理した線形斉次常微分方程式

$$\frac{d^n y(z)}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}y(z)}{dz^{n-1}} + \cdots + p_2(z)\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + p_0(z)y(z) = 0 \tag{2-1-1}$$

の係数である z の関数 $\{p_k(z)\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ が，点 z_1 $(\neq \infty)$ の近傍においてすべて正則であるとき，点 z_1 を微分方程式 (2-1-1) の**通常点** (ordinary point) と呼ぶ．それに対して，$\{p_k(z)\}$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ のいずれかが点 z_0 $(\neq \infty)$ の近傍において正則でないとき，点 z_0 をこの微分方程式の**係数特異点**と呼ぶ．

すでに 1-5 節で証明したように，線形常微分方程式の解の特異点は微分方程式の係数特異点以外に存在しない．つまり，線形常微分方程式の解の特異点は，解である関数を発見するのを待たずにあらかじめその位置を知ることのできる**固定特異点**のみである．一方，微分方程式の係数特異点は必ずしも微分方程式の解の特異点ではなく，微分方程式の解はその係数特異点において正則でありうる (1-4 節)．

次に，ロンスキー行列式を導入しアーベルの公式を導く．ある領域において n 個の関数列 $\{y_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ が**一次従属**であるとき，すなわち

$$\sum_{k=1}^{n} C_k y_k(z) = 0 \tag{2-1-2a}$$

を z の関数として恒等的に満たす，すべて 0 ではない n 個の係数列 $\{C_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ が存在するとき，式 (2-1-2a) を i 階微分 $(i = 1, \ldots, n-1)$ した式

$$\sum_{k=1}^{n} C_k y_k^{(i)}(z) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n-1) \tag{2-1-2b}$$

も恒等的に成立する．こうして作られた係数列 $\{C_k\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ の斉次連立 1 次方程式 (2-1-2a, b) がすべて 0 ではない自明な解をもつこと，すなわち $\{y_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ が一次従属であることは，**ロンスキー行列式** (Wronskian)

$$W = W[y_1(z), y_2(z), \ldots, y_n(z)] \equiv \det \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \ldots & y_n(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) & \ldots & y_n'(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(z) & y_2^{(n-1)}(z) & \ldots & y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix} \tag{2-1-3}$$

が恒等的に 0 であることと同値である．

微分方程式 (2-1-1) の任意の n 個の解 $\{y_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ のロンスキー行列式 (2-1-3) を微分すると，微分方程式

$$\frac{dW(z)}{dz} = -p_{n-1}(z)W(z) \tag{2-1-4a}$$

が導かれ（演習問題 2-1），これからただちに**アーベル** (Abel) **の公式**

$$W(z) = \exp\left[-\int^{z} p_{n-1}(t)\,dt\right] \tag{2-1-4b}$$

を得る．微分方程式 (2-1-1) の n 個の解により定義されるロンスキー行列式であるが，実際に解を求めるまでもなく微分方程式 (2-1-1) の一つの係数 $p_{n-1}(z)$ のみにより全体に掛かる係数，すなわち式 (2-1-4b) の積分定数を除いて定まる．すなわち，個々の解により変化するのはロンスキー行列式全体にかかる係数のみであることがわかる．

この結果を用いて，線形常微分方程式の係数特異点 z_0 近傍の解の性質を明らかにする．まず，微分方程式の通常点すなわち係数関数の通常点 z_1 を含む領域において一次独立な解 $\{y_j(z)\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ を考える．そして，点 z_1 を始点とし特異点 z_0 を左に見つつ一周する閉曲線 C に沿い $\{y_j(z)\}$ を解析接続してゆく (図 2-1)．閉曲線の終点 z_1 に戻ったとき $\{y_j(z)\}$ がそれぞれ $\{u_j(z)\}$ $(j = 1, \ldots, n)$ に移ったとすると，解析接続により得た関数 $\{u_j(z)\}$ は必ずしももとの解 $\{y_j(z)\}$ と一致しないが，これらは微分方程式 (2-1-1) の解であるから $\{y_k(z)\}$ の一次結合

$$u_j(z) = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k(z) \quad (j = 1, \ldots, n) \tag{2-1-5}$$

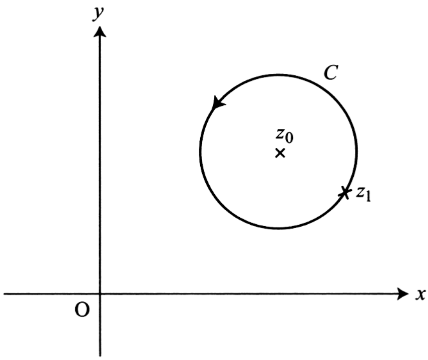


図 2-1　通常点 z_1 を始点とし係数特異点 z_0 を左に見つつ一周する閉曲線 C

である．

さて，ロンスキー行列式

$$W(z) = W(z_1)\exp\left[-\int_{z_1}^{z} p_{n-1}(t)\,dt\right] \tag{2-1-4b 再掲}$$

は，点 z_1 から閉曲線 C（図 2-1）に沿い一周した後

$$W(z_1e^{2\pi i}) = W(z_1)\exp\left[-\int_C p_{n-1}(t)\,dt\right] \tag{2-1-4c}$$

に移る．閉曲線 C に沿う積分は，係数関数 $p_{n-1}(t)$ の特異点 z_0 の**留数**(residue) $R(p_{n-1}(z_0))$ を用いて，

$$\int_C p_{n-1}(t)\,dt = 2\pi i R(p_{n-1}(z_0)) \tag{2-1-6}$$

と表すことができるので（[18]），一周した後のロンスキー行列式 (2-1-4c) は

$$W(z_1e^{2\pi i}) = W(z_1)\exp\left[-2\pi i R(p_{n-1}(z_0))\right] \tag{2-1-7}$$

とかける．$W(z_1)$ が 0 でないので $W(z_1e^{2\pi i})$ も 0 ではない．すなわち，$\{y_k(z)\}$ および $\{u_j(z)\}$ がともに微分方程式 (2-1-1) の一次独立な解であるから，式 (2-1-5) の係数行列

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

の行列式は 0 ではない．

$$\det A \neq 0 \tag{2-1-8}$$

次に，解

$$Y(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(z) \tag{2-1-9}$$

とそれを解析接続しつつ閉曲線 C に沿い一周した後に移る関数

$$U(z) = \sum_{j=1}^{n} c_j u_j(z) \tag{2-1-10}$$

の間に，一次従属の関係

$$U(z) = \lambda Y(z) \tag{2-1-11}$$

が成り立つような特解を求める．$\{y_k(z)\}$ を底にとると式 (2-1-11) は

$$\sum_{j=1}^{n} c_j \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k(z) = \lambda \sum_{k=1}^{n} c_k y_k(z) \tag{2-1-12a}$$

すなわち，

$$\sum_{j=1}^{n} c_j a_{jk} = \lambda c_k \qquad (k = 1, \ldots, n) \tag{2-1-12b}$$

となる．すなわち，係数列 $\{c_k\}$ が自明でない解をもつための必要十分条件が，係数行列 A の特性方程式

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{2-1-13}$$

である（転置行列 A^T ともとの行列 A の特性方程式は等しい）．$\det A \neq 0$ (2-1-8) であるから，式 (2-1-13) の固有値（特性根）$\{\lambda_m\}$ $(m = 1, \ldots, n)$ の中に 0 は含まれない．

なお，固有値 $\{\lambda_m\}$ $(m = 1, \ldots, n)$ は，微分方程式の特異点 z_0 により定まる指標であり，一次独立な基底 $\{y_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ の選び方に依存しない．なぜならば，別の一次独立な基底 $\{s_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ を選ぶと，係数行列 A の代わりに

$$B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

が現れるが，これらの間には正則行列（non-singular matrix）P を介して

$$B = P^{-1} A P \tag{2-1-14}$$

の関係がある．すなわち相似であるゆえ，これら二つの行列 A, B の固有値は一致するからである（演習問題 2-12）．

■ [n 個の固有値がすべて異なる場合]

係数行列 A の特性方程式 (2-1-13) の n 個の固有値 $\{\lambda_m\}$ $(m=1,\ldots,n)$ がすべて異なる場合には，A は対角行列に相似であるゆえ，

$$U_m(z)=\lambda_m Y_m(z) \qquad (m=1,\ldots,n) \tag{2-1-15}$$

となり，$\{Y_m\}$ $(m=1,\ldots,n)$ を解の基底とすることができる．

ここで，関数

$$(z-z_0)^{\alpha_m} \tag{2-1-16a}$$

を採り上げよう．この関数が特異点 z_0 を左に見つつ閉曲線 C に沿い一周し終点 z_1 にもどると（図 2-1），

$$e^{2\pi i\alpha_m}(z-z_0)^{\alpha_m} \tag{2-1-16b}$$

に移るので，固有値 λ_m に対して α_m を

$$\lambda_m=e^{2\pi i\alpha_m} \tag{2-1-17}$$

と定義すると，関数

$$S_m(z-z_0)=(z-z_0)^{-\alpha_m}Y_m(z) \tag{2-1-18}$$

は閉曲線 C に沿い一周し終点 z_1 に戻ったとき，もとの値にもどる．すなわち，$S_m(z-z_0)$ は特異点 z_0 を含む領域で正則な関数である．

なお，指数 α_m はその定義式 (2-1-17) から明らかなように整数の差だけの不定性がある．つまり，α_m を任意の整数 n を用いて α_m+n と置き換えることができる (2-3 節)．

以上の手続きにより，すべての $S_m(0)$ が 0 でなくかつ有限であるように α_m を決定できる（具体的手続きは 2-3 節）とき，すなわちすべての解が代数的分岐をもつ**正規解**

$$Y_m(z)=(z-z_0)^{\alpha_m}S_m(z-z_0) \tag{2-1-19}$$

であるとき，1-4 節の定義により，特異点 z_0 は**正規特異点**である．

正則な関数 $S_m(z-z_0)$ はテイラー級数展開することができ，解 (2-1-19) は最も一般的に

$$Y_m(z)=(z-z_0)^{\alpha_m}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_0)^k \tag{2-1-20}$$

の型の級数で表現できる．級数 (2-1-20) を**フロベニウス** (Frobenius) **級数**，指数 α_m を**特性指数** (indicial exponent) あるいは単に**指数** (exponent) と呼ぶ．特性指数 α_m を適当に選択することにより級数の初項の係数 $a_0\neq 0$ とすることができる．なお，フロベニウス級数 (2-1-20) の指数 α_m が 0 以上の整数であるときには，テイラー級数となりこの解は正則である．すなわち，この場合の係数特異点は解の特異点でない．

一方，$S_m(0)$ が 0 でなくかつ有限であるように α_m を決定できない解・**非正規解** (irregular solutions) が少なくとも一つ存在するとき，特異点 z_0 はその解の真性特異点であり，少なくとも一つ非正規解をもつ特異点は 1-4 節の定義により**非正規特異点**である．

■ [固有値に重根が含まれる場合]

次に，係数行列 A の特性方程式の n 個の解すなわち固有値中に重根が含まれる場合を考察する．このとき，適当な基底を選ぶことにより係数行列 A を**ジョルダン** (Jordan) **標準形**

$$\begin{bmatrix} J^1 & O & \cdots & \cdots & \cdots & O \\ O & J^2 & O & \cdots & \cdots & O \\ O & O & J^3 & O & \cdots & O \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ O & \cdots & \cdots & \cdots & O & J^M \end{bmatrix} \tag{2-1-21a}$$

に移すことができる．すなわち，係数行列 A はジョルダン標準形に相似である．ここに $\{J^j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, M)$ は，固有値 $\{\lambda_k\}$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ に対応する $d(j)$ 次のジョルダン細胞

$$J^j = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k & 1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix} \quad (d(j)\ 次) \tag{2-1-21b}$$

である．ただし，$M \geq m$ であり，複数のジョルダン細胞が同一の固有値に対応することがある ([23])．

そこで，式 (2-1-21b) の行の上下の順序を逆にすると，

$$\begin{aligned} &U_1(z) = \lambda_k Y_1(z), \quad U_2(z) = \lambda_k Y_2(z) + Y_1(z), \cdots \\ &U_l(z) = \lambda_k Y_l(z) + Y_{l-1}(z), \cdots, U_{d(j)}(z) = \lambda_k Y_{d(j)}(z) + Y_{d(j)-1}(z) \end{aligned} \tag{2-1-22}$$

を得る．式 (2-1-22) の先頭にある $Y_1(z)$ については，重根のない場合と同様に

$$Y_1(z) = (z - z_0)^{\alpha_k} S_1(z - z_0), \quad \lambda_k = e^{2\pi i \alpha_k} \tag{2-1-23}$$

型の解を得る．

新しい型の解を求めるために，式 (2-1-22) の初めの二つを組み合わせると，

$$\frac{U_2(z)}{U_1(z)} = \frac{Y_2(z)}{Y_1(z)} + \frac{1}{\lambda_k} \tag{2-1-24}$$

を得る．これが係数行列 A の固有値に重根が含まれる場合に新たに現れる特徴である．すなわち，関数 $Y_2(z)/Y_1(z)$ が，通常点 z_1 を始点とし特異点 z_0 を左に見つつ閉曲線 C に沿い一周し終点 z_1 に戻り $U_2(z)/U_1(z)$ となったとき，定数 $1/\lambda_k$ だけ増加する．これは関数 $1/(2\pi i\lambda_k)\log(z-z_0)$ と同じ性質であるから，

$$\frac{Y_2(z)}{Y_1(z)} = \frac{1}{2\pi i\lambda_k}\log(z-z_0) + S_2(z-z_0) \tag{2-1-25}$$

とおけば，$S_2(z-z_0)$ は閉曲線 C に沿い一周し終点 z_1 に戻ったときもとの値にもどる．すなわち，$S_2(z-z_0)$ は特異点 z_0 を含む領域で正則な関数である．ゆえに，式 (2-1-23) と合わせて

$$Y_2(z) = (z-z_0)^{\alpha_k}\left[\frac{S_1(z-z_0)}{2\pi i\lambda_k}\log(z-z_0) + S_2(z-z_0)S_1(z-z_0)\right]$$

すなわち，

$$Y_2(z) = (z-z_0)^{\alpha_k}[S_{21}(z-z_0)\log(z-z_0) + S_{20}(z-z_0)] \tag{2-1-26}$$

を得る．ここに，$S_{21}(z-z_0), S_{20}(z-z_0)$ は特異点 z_0 を含む領域で正則な関数である．

次に式 (2-1-22) の一般項

$$U_l(z) = \lambda_k Y_l(z) + Y_{l-1}(z) \tag{2-1-22a}$$

を考察する．まず，対数関数 t

$$t \equiv \frac{1}{2\pi i}\log(z-z_0) \tag{2-1-27}$$

を変数とする関数 $y_l(t)$ を次式で定義する．

$$Y_l(z) \equiv (z-z_0)^{\alpha_k} y_l(t) \tag{2-1-28}$$

式 (2-1-23, 25) によれば，$y_l(t)$ $(l=1,2)$ の特解は

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \frac{t}{\lambda_k} \tag{2-1-29}$$

である．さて，通常点 z_1 を始点とし特異点 z_0 を左に見つつ閉曲線 C に沿い一周し終点 z_1 に戻ったとき，$y_l(t)$ は $y_l(t+1)$ に移るので（図 2-1），式 (2-1-22a) より，

$$\lambda_k y_l(t+1) = \lambda_k y_l(t) + y_{l-1}(t) \tag{2-1-30}$$

を得る．漸化式 (2-1-30) の初期条件 (2-1-29) を満足する特解は，

$$y_l(t) = s_l(t) \equiv \frac{t(t-1)\cdots(t-l+2)}{\lambda_k^{l-1}(l-1)!} \tag{2-1-31}$$

である．さらに，一般解が

$$y_l(t) = \sum_{i=1}^{l} s_i(t)u_i(t) \tag{2-1-32}$$

であることを確かめることができる（演習問題2-2）．ここに，$u_i(t)$ は周期 1 の任意関数

$$u_i(t+1) = u_i(t) \tag{2-1-33}$$

すなわち，変数 z に関して解析関数である．

こうして，係数行列 A の固有値に重根が含まれるとき，解は，

$$Y_j(z) = (z-z_0)^{\alpha_j} \cdot \left[S_{j0}(z-z_0) + \sum_{l=1}^{d(j)-1} S_{jl}(z-z_0)\{\log(z-z_0)\}^l \right]$$

$$(j = 1, 2, 3, \ldots, M) \tag{2-1-34}$$

と表現できる．ここに，$S_{jl}(z-z_0)$ $(l = 0, 1, \ldots d(j)-1)$ は特異点 z_0 を含む領域で正則な関数である．

すべての解が**正規解**，すなわちフロベニウス級数 (2-1-20) ないし対数関数を含む解 (2-1-34) であるとき，1-4 節の定義により，特異点 z_0 は**正規特異点**である．一方，**正規解**(2-1-20) ないし (2-1-34) と表現できない**非正規解**が少なくとも一つ存在するとき，すなわち特異点 z_0 が線形常微分方程式 (2-1-1) の少なくとも一つの解の真性特異点であるとき，1-4 節の定義により特異点 z_0 は**非正規特異点**である．なお，当然ながら変数変換を施した結果，通常点と特異点および特異点の種類は移り変わることがある．

以下の 3 節において，線形常微分方程式の通常点，正規特異点，非正規特異点それぞれのまわりの局所漸近解析を行う．その結果得られる級数展開の型は，通常点のまわりではテイラー級数，正規特異点のまわりではフロベニウス級数，非正規特異点のまわりでは（一般的な）漸近級数となる．なお，テイラー級数，フロベニウス級数も漸近級数の一種である（[5] 第 2 章）．

2-2　通常点まわりのテイラー級数展開

前節冒頭で定義したように，点 z_1 $(\neq \infty)$ の近傍において，最高階の係数 $p_n(z)$ を 1 と整理した線形斉次常微分方程式

$$\frac{d^n y(z)}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}y(z)}{dz^{n-1}} + \cdots + p_2(z)\frac{d^2 y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + p_0(z)y(z) = 0$$

(2-1-1 再掲)

の係数関数 $\{p_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n-1)$ がすべて正則であるとき，点 z_1 を微分方程式 (2-1-1) の**通常点**（ordinary point）と呼ぶ．微分方程式 (2-1-1) の n 個の一次独立な解

$\{y_k(z)\}\,(k=1,\ldots,n)$ は通常点の近傍で正則であり，解は通常点のまわりにテイラー級数展開

$$y(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_k(z-z_1)^k \tag{2-2-1}$$

でき，かつその収束半径は，少なくとも係数関数の特異点のうちその通常点に最も近い点までの距離以上である（5-2 節）．以下の諸例に見るように，級数 (2-2-1) を微分方程式 (2-1-1) に代入し，$(z-z_1)$ の各次数ごとに係数が 0 になるという条件を課すことにより，係数 a_k を順次定める漸化式を得る．

■ ［エィリー関数］（5-6 節 B）

原点 $x_1=0$ はエィリーの微分方程式

$$\frac{d^2y(x)}{dx^2}-xy(x)=0 \tag{B-1}$$

の通常点である．そこで，エィリーの微分方程式の解すなわちエィリー関数の原点まわりのテイラー級数展開式 (B-2) を見出そう．式 (2-2-1) で変数 z を x とし，さらに $x_1=0$ とおいたものを式 (B-1) に代入すると，

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left[k(k-1)a_kx^{k-2}-a_kx^{k+1}\right]=\sum_{k=0}^{\infty}k(k-1)a_kx^{k-2}-\sum_{k=3}^{\infty}a_{k-3}x^{k-2}=0 \tag{2-2-2}$$

を得る．恒等式 (2-2-2) の x のすべての次数の係数が 0 になることから，係数 a_k を順次定める漸化式

$$\begin{aligned}&k(k-1)a_k=0 \quad (k=0,1,2)\\&k(k-1)a_k-a_{k-3}=0 \quad (k=3,4,\ldots)\end{aligned} \tag{2-2-3}$$

を得る．まず，式 (2-2-3) の上段より，初めの二つの係数 a_0, a_1 は任意であり，次の

$$a_2=0$$

であることがわかる．

次に，式 (2-2-3) の下段より，

$$\left.\begin{aligned}a_{3n}&=\frac{a_0}{3n(3n-1)(3n-3)(3n-4)\cdots6\cdot5\cdot3\cdot2}=\frac{a_0\Gamma(2/3)}{3^{2n}n!\Gamma(n+2/3)}\\a_{3n+1}&=\frac{a_1}{(3n+1)3n(3n-2)(3n-3)\cdots7\cdot6\cdot4\cdot3}=\frac{a_1\Gamma(4/3)}{3^{2n}n!\Gamma(n+4/3)}\\a_{3n+2}&=0\end{aligned}\right\} \tag{2-2-4}$$

を得る．ここで

$$c_0=a_0\Gamma\left(\frac{2}{3}\right),\quad c_1=a_1\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \tag{2-2-5}$$

とおけば，エィリーの微分方程式の一次独立な二つの級数解の和としての一般解

$$y(x) = c_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^{2n} n! \Gamma(n+2/3)} + c_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3^{2n} n! \Gamma(n+4/3)} \tag{2-2-6}$$

を得る．その収束半径 R が $+\infty$ であることは容易に確かめられる (5-2 節).

式 (2-2-6) において任意定数をそれぞれ以下のように選んだものが第 1 種および第 2 種のエィリー関数である．

$$\begin{aligned} Ai(x) &= 3^{-2/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^{2n} n! \Gamma(n+2/3)} - 3^{-4/3} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3^{2n} n! \Gamma(n+4/3)} \\ Bi(x) &= 3^{-1/6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n}}{3^{2n} n! \Gamma(n+2/3)} + 3^{-5/6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{3^{2n} n! \Gamma(n+4/3)} \end{aligned} \tag{B-2}$$

2-3　正規特異点まわりの局所解析（フロベニウス級数展開）

1-4 節の定義により，n 階常微分方程式の係数特異点 $z_0 (\neq \infty)$ の近傍で，一次独立な n 個の解 $\{w_k(z)\}$ $(k = 1, \ldots, n)$ がすべて，式 (2-1-20) ないし (2-1-34) で表される正規解，すなわち正則であるかあるいは極ないし（代数的または対数的）分岐の型のみの特異性をもつ解であるとき，特異点 z_0 は正規特異点である．

本節で，斉次線形微分方程式の係数特異点が正規特異点であるための必要十分条件を示し，そのうち十分条件であることを証明しつつ，具体的に正規解を求めてゆこう．なお，必要条件であることの証明は 5-5 節を参照されたい．

■ ［正規特異点であるための必要十分条件］

点 z_0 が斉次線形常微分方程式

$$\frac{d^n y(z)}{dz^n} + p_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} y(z)}{dz^{n-1}} + \cdots + p_2(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + p_1(z) \frac{dy(z)}{dz} + p_0(z) y(z) = 0$$

(2-1-1 再掲)

の正規特異点であるための必要十分条件は，点 z_0 において係数関数 $p_0(z), p_1(z), p_2(z), \ldots, p_{n-1}(z)$ のいずれかが正則ではないが，

$$(z-z_0)^n p_0(z), (z-z_0)^{n-1} p_1(z), (z-z_0)^{n-2} p_2(z), \ldots, (z-z_0)^1 p_{n-1}(z) \tag{2-3-1}$$

のすべてが正則であること，すなわち，すべての係数関数を

$$p_m(z) = \frac{S_m(z)}{(z-z_0)^{n-m}} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots, n-1) \tag{2-3-2}$$

と表し得ることである．ここに $S_m(z)$ は特異点 z_0 の近傍で正則な関数である．

■ [正規特異点であるための十分条件・フロベニウスの求解法]

以下，一般性を失うことなく特異点 $z_0 = 0$ とする[*1]．線形斉次常微分方程式 (2-1-1) の係数関数に式 (2-3-2) を代入した微分方程式

$$Ly(z) \equiv z^n \frac{d^n y(z)}{dz^n} + z^{n-1} S_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} y(z)}{dz^{n-1}} + \cdots + z^2 S_2(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2}$$

$$+ z S_1(z) \frac{dy(z)}{dz} + S_0(z) y(z) = 0 \tag{2-3-3}$$

が特異点 $z_0 = 0$ において n 個の正規解をもつこと，およびその解の求め方を具体的に示し，同時に特異点 $z_0 = 0$ が正規特異点であるための十分条件が式 (2-3-2) であることを証明する．

微分方程式 (2-3-3) のフロベニウス級数解

$$y(z, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m z^{\alpha+m} \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-4}$$

を仮定すると，微分方程式 (2-3-3) は

$$Ly(z, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \varphi(z, \alpha + m) z^{\alpha+m} = 0 \tag{2-3-5}$$

$$\varphi(z, \alpha + m) \equiv P(n, \alpha + m) + P(n-1, \alpha + m) S_{n-1}(z) + \cdots$$

$$+ P(1, \alpha + m) S_1(z) + S_0(z) \tag{2-3-6}$$

と表すことができる．ここに

$$P(l, \alpha + m) \equiv (\alpha + m)(\alpha + m - 1) \cdots (\alpha + m - l + 1) \tag{2-3-7}$$

である．特異点 $z_0 = 0$ の近傍で正則な関数 $\varphi(z, \alpha + m)$ をテイラー級数展開

$$\varphi(z, \alpha + m) = \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j(\alpha + m) z^j \tag{2-3-8}$$

すると，微分方程式 (2-3-5) は次式となる．

$$Ly(z, \alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[z^{\alpha+k} \sum_{j=0}^{k} \left[a_{k-j} \psi_j(\alpha + k - j) \right] \right] = 0 \tag{2-3-9}$$

フロベニウス級数解 (2-3-4) が微分方程式 (2-3-9) を満たすためには，式 (2-3-9) の右辺の級数の z に関するすべてのベキの係数が 0 でなければならない．

[*1] 複素平面上の任意の点を変数の一次変換により原点に移すことができる．

$$a_0\psi_0(\alpha) = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-10a}$$

$$\left.\begin{aligned} &a_1\psi_0(\alpha+1) + a_0\psi_1(\alpha) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_k\psi_0(\alpha+k) + a_{k-1}\psi_1(\alpha+k-1) + \cdots + a_0\psi_k(\alpha) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-3-10b}$$

このうち，式 (2-3-10a) すなわち，

$$\psi_0(\alpha) = 0 \tag{2-3-11}$$

が指数 α を定める**指数方程式**（indicial equation）である．そして，式 (2-3-10b) が，係数 a_k を順々に決定する漸化式となり，これを順次解くことによりフロベニウス級数解 (2-3-4) を，また一般の z_0 に対しては

$$y_1(z) = (z - z_0)^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-12}$$

を得る．なお，式 (2-3-12) は斉次線形常微分方程式の級数解であるから $a_0 \neq 0$ は任意定数である．

しかし，指数方程式 (2-3-11) が指数 α の互いに整数の差 k をもつ根を有する場合には $\psi_0(\alpha + k) = 0$ となるので，漸化式

$$a_k\psi_0(\alpha+k) + a_{k-1}\psi_1(\alpha+k-1) + \cdots + a_0\psi_k(\alpha) = 0 \quad \text{(2-3-10b 再掲)}$$

から a_k およびそれ以降の係数 $a_m, (m = k+1, k+2, \ldots)$ を求めることはできない．それは，指数 α の互いに整数の差 k をもつ二つの根は 2-1 節の一般論における固有値 λ_n の重根に対応するからである．したがって，指数方程式 (2-3-11) が指数 α の m 重根をもつ場合にもこの手順のみでは第 2，3，$\cdots$，m 番目の解を求めることはできない．ただし，式 (2-3-10b) の第 1 項 $a_k\psi_0(\alpha+k)$ を除くすべての項の和がたまたま 0 である場合には特に問題は生ずることなく，係数 a_k を任意に選び以下の係数 a_m $(m = k+1, k+2, \ldots)$ をそれに続く漸化式で求めることができる．

以下では，指数方程式 (2-3-11) が指数 α の互いに整数の差 k をもつ根を有する場合，および重根をもつ場合の両者を一括して解決する手法を示す．まず，新たにパラメータ β を導入し，その変域を指数 α の指数方程式 (2-3-11) の根（すべて孤立点）の近傍に限定する．再び特異点 $z_0 = 0$ とする．級数

$$y(z, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\beta) z^{\beta+k} \tag{2-3-13}$$

を，$a_0 \neq 0$ を任意とし，係数 $\{a_k(\beta)\}$ $(k = 1, \ldots,)$ を式 (2-3-10b) に対応して，

$$\left.\begin{aligned} &a_1(\beta)\psi_0(\beta+1) + a_0\psi_1(\beta) = 0 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &a_k(\beta)\psi_0(\beta+k) + a_{k-1}(\beta)\psi_1(\beta+k-1) + \cdots + a_0\psi_k(\beta) = 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-3-14}$$

により定義すると，級数 (2-3-13) は微分方程式

$$Ly(z,\beta) = \sum_{k=0}^{\infty}\left[z^{\beta+k}\sum_{j=0}^{k}\left[a_{k-j}(\beta)\psi_j(\beta+k-j)\right]\right] = a_0\psi_0(\beta)z^{\beta} \tag{2-3-15}$$

を満たす．もちろん

$$Ly(z,\alpha) = a_0\psi_0(\alpha)z^{\alpha} = 0 \tag{2-3-16}$$

である．

ここで，指数方程式 (2-3-11) の根 α のうち，等しいかあるいは互いに整数の差をもつ根 l 種のグループを $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l$ とし，重複度をそれぞれ $t_1, t_2, \ldots, t_l$ とする．ただし，これらを実部の大きい順に，すなわち，$l1 < l2$ ならば，$\alpha_{l1} - \alpha_{l2}$ は自然数であるように並べておく．

まず，互いに整数の差をもつ根を有する場合の不都合であった，$\psi_0(\alpha+k) = 0$ で割る，という操作を避けるべく，a_0 の代わりに，a_0 に

$$\psi_0(\beta+1)\psi_0(\beta+2)\cdots\psi_0(\beta+s) \quad (s = \alpha_1 - \alpha_l)$$

を乗じたもの

$$a_0\psi_0(\beta+1)\psi_0(\beta+2)\cdots\psi_0(\beta+s) \tag{2-3-17}$$

を用いる．その結果，微分方程式 (2-3-15) は

$$Ly(z,\beta) = a_0\psi_0(\beta)\psi_0(\beta+1)\psi_0(\beta+2)\cdots\psi_0(\beta+s)z^{\beta} \tag{2-3-18}$$

となる．さて，$\psi_0(\beta)$ は因数 $(\beta-\alpha_1), (\beta-\alpha_2), (\beta-\alpha_3), \ldots, (\beta-\alpha_l)$ のそれぞれ，$t_1, t_2, t_3, \ldots, t_l$ 重根をもつ．$\psi_0(\beta+\alpha_1-\alpha_2)$ は因数 $(\beta-\alpha_1)$ をもたず，因数 $(\beta-\alpha_2)$ の t_1 重根をもつ．その結果，微分方程式 (2-3-18) の右辺の係数 $\psi_0(\beta)\psi_0(\beta+1)\psi_0(\beta+2)\cdots\psi_0(\beta+s)$ は，因数 $(\beta-\alpha_1), (\beta-\alpha_2), (\beta-\alpha_3), \ldots$ のそれぞれ，$t_1, t_1+t_2, t_1+t_2+t_3, \ldots$ 重根をもつ．

第一の根 α_1 が方程式 (2-3-18) の t_1 重根であるから，

$$\begin{aligned} \left.\frac{\partial^i y(z,\beta)}{\partial\beta^i}\right]_{\beta=\alpha_1} &= \left.\frac{\partial^i}{\partial\beta^i}\sum_{k=0}^{\infty}a_k(\beta)z^{\beta+k}\right]_{\beta=\alpha_1} \\ &= \left[\sum_{k=0}^{\infty}z^{\beta+k}\left\{\sum_{j=0}^{i}{}_iC_j\frac{\partial^{i-j}a_k(\beta)}{\partial\beta^{i-j}}(\log z)^j\right\}\right]_{\beta=\alpha_1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, t_1-1) \end{aligned} \tag{2-3-19}$$

ももとの微分方程式 (2-3-3) の解である．

$$L\left.\frac{\partial^i y(z,\beta)}{\partial\beta^i}\right]_{\beta=\alpha_1}=0 \quad (i=0,1,2,\ldots,t_1-1)$$

すなわち，

$$\begin{aligned}&z^{\alpha_1}\sum_{j=0}^{i}{}_iC_j(\log z)^j f_{i-j}(z,\alpha_1)\\ &f_m(z,\alpha_1)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}z^k\left.\frac{\partial^m a_k(\beta)}{\partial\beta^m}\right]_{\beta=\alpha_1}\end{aligned}\quad (i=0,1,2,\ldots,t_1-1) \tag{2-3-20}$$

の型の t_1 個の解を得る．

次に，根 α_2 は方程式 (2-3-18) の t_1+t_2 重根であるが，

$$\left.\frac{\partial^i y(z,\beta)}{\partial\beta^i}\right]_{\beta=\alpha_2} \quad (i=0,1,2,\ldots,t_1-1)$$

は，すでに得た解 (2-3-20) と独立でない解（一次結合）を与えるだけであり，

$$\left.\frac{\partial^i y(z,\beta)}{\partial\beta^i}\right]_{\beta=\alpha_2} \quad (i=t_1,t_1+1,t_1+2,\ldots,t_1+t_2-1)$$

が t_2 個の新しい解

$$\begin{aligned}&z^{\alpha_2}\sum_{j=0}^{i}{}_iC_j(\log z)^j f_{i-j}(z,\alpha_2)\\ &f_m(z,\alpha_2)\equiv\sum_{k=0}^{\infty}z^k\left.\frac{\partial^m a_k(\beta)}{\partial\beta^m}\right]_{\beta=\alpha_2}\end{aligned}\quad (i=t_1,t_1+1,t_1+2,\ldots,t_1+t_2-1) \tag{2-3-21}$$

を与える．根 $\alpha_3,\ldots,\alpha_l$ についても同様である．

以上の結果をまとめると，方程式 (2-3-3) を満たす n 個の一次独立な解 $\{y_k(x)\}$ $(k=1,\ldots,n)$ は，係数特異点 z_0（任意の値にもどす）の近傍で正則であるか，そうでないときは極または（代数的または対数的）分岐の型の特異性のみをもつ正規解

$$y_k(z)=(z-z_0)^{\alpha_k}\sum_{m=0}^{t_k-1}\left[\log(z-z_0)\right]^m A_{k,m}(z-z_0) \tag{2-3-22}$$

である．ここに $A_{k,m}(z)$ は解析関数であり，これを通常点のまわりにテイラー級数展開するとき，収束半径は係数関数の特異点のうちその通常点に最も近い点までの距離以上である（5-2 節）．すべての解が正規解 (2-3-22) の形である係数特異点 z_0 は正規特異点である．

■ [2 階斉次線形微分方程式]

これまで展開してきた任意階の斉次線形微分方程式に関する一般論を，応用上最も

重要な 2 階斉次線形微分方程式に適用する．すなわち，正規特異点 z_0 を有する 2 階斉次線形常微分方程式，

$$Ly(z) \equiv (z-z_0)^2\frac{d^2y(z)}{dz^2} + (z-z_0)S_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + S_0(z)y(z) = 0$$

$$S_0(z) = S_{00} + (z-z_0)S_{01} + (z-z_0)^2S_{02} + o(z-z_0)^2 \qquad z \to z_0 \tag{2-3-23}$$

$$S_1(z) = S_{10} + (z-z_0)S_{11} + (z-z_0)^2S_{12} + o(z-z_0)^2 \qquad z \to z_0$$

を考察する．ここに，$S_0(z), S_1(z)$ は特異点 z_0 の近傍で正則な関数である．

任意階の常微分方程式に関する一般論によれば，2 階常微分方程式 (2-3-23) の正規特異点 z_0 における指数方程式 (2-3-11) の二つの解を α_1, α_2 ($Re\alpha_1 \geq Re\alpha_2$) とするとき，正規特異点 z_0 近傍の第 1 の解はフロベニウス級数

$$y_1(z) = (z-z_0)^{\alpha_1}\sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-12 再掲}$$

である．特に，α_1 が 0 または正の整数であるとき式 (2-3-12) はテイラー級数となり，$y_1(z)$ は正則である．

第 2 の解は

① 指数 α_1, α_2 の差が 0 以上の整数でないとき，あるいは 0 以上の整数であり，$\alpha_1 = \alpha_2 + k$，したがって，$\psi_0(\alpha_2 + k) = 0$ であるが，

$$a_k\psi_0(\alpha_2+k) + a_{k-1}\psi_1(\alpha_2+k-1) + \cdots + a_0\psi_k(\alpha_2) = 0 \tag{2-3-10b 再掲}$$

の第 2 項以下の和が 0 であり，係数 a_k によらず式 (2-3-10b) が恒等的に成立するとき，やはりフロベニウス級数

$$y_{21}(z) = (z-z_0)^{\alpha_2}\sum_{k=0}^{\infty} b_k(z-z_0)^k \quad (b_0 \neq 0) \tag{2-3-24}$$

である．一方，

② 指数 α_1, α_2 が重根であるか，またはその差が整数であり，式 (2-3-10b) の第 2 項以下の和が 0 でないとき，

$$y_{22}(z) = y_1(z)\log(z-z_0) + (z-z_0)^{\alpha_2}\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_0)^k \quad (c_0 \neq 0) \tag{2-3-25}$$

である．次の例でこれらの解が現れる過程を詳しくみてゆこう．

■ **[ベッセル関数の正規特異点の局所解析]**

ベッセルの微分方程式，

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0 \quad (\nu \geq 0) \tag{A-1}$$

の正規特異点 $z_0 = 0$ まわりの 2 個の正規解を求めよう．

微分方程式 (A-1) がフロベニウス級数解

$$y(z,\alpha) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\alpha+k} \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-4 再掲}$$

をもつと仮定し，これを微分方程式 (A-1) に代入すると，

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[(\alpha+k)(\alpha+k-1) + (\alpha+k) - \nu^2\right] a_k z^{\alpha+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^{\alpha+k+2} = 0 \tag{2-3-26}$$

を得る．式 (2-3-4) が微分方程式 (A-1) の解であるためには，式 (2-3-26) の左辺の z のベキのすべての係数が 0 でなければならない．

$$\psi_0(\alpha)a_0 = (\alpha^2 - \nu^2)a_0 = 0 \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-27a}$$

$$\left[(\alpha+1)^2 - \nu^2\right] a_1 = 0 \tag{2-3-27b}$$

$$\left[(\alpha+k)^2 - \nu^2\right] a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{2-3-27c}$$

最初の式 (2-3-27a) は指数 α を定める指数方程式であり，その解は

$$\alpha = \pm\nu \tag{2-3-28}$$

である．そして，式 (2-3-27b, c) が，係数 a_k を順々に決定する漸化式である．

まず，指数方程式の第 1 の解

$$\alpha = \nu \tag{2-3-28a}$$

に対応する微分方程式 (A-1) の解を求める．式 (2-3-28a) を (2-3-27b) に代入すると

$$(2\nu + 1)a_1 = 0$$

となり，$\nu \geq 0$ であるから，$a_1 = 0$ を得る．さらにこれと式 (2-3-27c) から

$$a_{2m-1} = 0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2-3-29}$$

を得る．すなわち，奇数次の係数はすべて 0 である．

次に偶数次の係数を求めるべく，式 (2-3-28a) を (2-3-27c) に代入すると

$$(2\nu k + k^2)a_k + a_{k-2} = 0, \quad k = 2m \quad (m = 1, 2, 3, \ldots)$$

すなわち，

$$a_{2m} = \frac{-1}{2m(2\nu + 2m)} a_{2m-2} = \cdots = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!(\nu+m)(\nu+m-1)\ldots(\nu+1)} a_0 \quad (m = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2-3-30}$$

を得る．ここで，任意定数 $a_0 \neq 0$ を

$$a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(\nu+1)} \tag{2-3-31}$$

と選ぶと，式 (2-3-30) は

$$a_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} \tag{2-3-30a}$$

となる．これが**第 1 種ベッセル関数**

$$J_\nu(z) = z^\nu \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m+\nu} m! \Gamma(\nu + m + 1)} \tag{A-2a}$$

である．

次に，指数方程式のもう一方の解

$$\alpha = -\nu \tag{2-3-28b}$$

に対応する微分方程式 (A-1) の解を求める．もし，2ν が 0 以上の整数でなければ同じ過程をたどることができるので，式 (A-2a) において係数 ν を $-\nu$ で置き換えればよい．

$$J_{-\nu}(z) = z^{-\nu} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m-\nu} m! \Gamma(-\nu + m + 1)}$$

2ν が奇数の場合も含め，一般に二つの解 $J_{-\nu}(z), J_\nu(z)$ はベッセルの微分方程式 (A-1) の一次独立な基底となる（[17]）が，次数 ν が整数 n に等しい（2ν が偶数）ときに限り，これら二つの解は一次従属である（演習問題 2-4）．

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

この場合，すなわち次数 ν が自然数 n に等しい場合は，微分方程式の正規特異点まわりの級数解を求めるフロベニウスの方法において指数方程式の二つの解 $\alpha = \pm\nu$ の差が整数になる場合であり，対数関数を含む第 2 の型の解が現れることをすでに見てきた．以下，実際に第 2 の型の解を導いてみよう．

ベッセルの微分方程式の次数 ν が自然数 n に等しいときには，指数方程式 (2-3-27a) の二つの解 $\alpha = \pm n$ の差が自然数 $2n$ となる．したがって，$\alpha = -n$ として漸化式 (2-3-26c) により係数 a_k を順次求めてゆくと，$k = 2n$ では，

$$[(-n + 2n)^2 - n^2]a_{2n} + a_{2n-2} = 0 \cdot a_{2n} + a_{2n-2} = 0$$

となり，係数 a_{2n} およびそれ以降の係数 $a_{2(n+k)}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ を定めることができなくなる．また，次数 $\nu = 0$ のときには，指数方程式が重根 $\alpha = 0$ をもつ場合になるので，先の手順のみでは第 2 の解を求めることはできない．以下で，これら二つのケースを一括して考察する．

n 階微分方程式の一般論に従い，フロベニウス級数

$$y(z, \beta) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\beta) z^{\beta+k} \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-13 再掲}$$

を考える．変数 β の変域は指数方程式 (2-3-27a) の根

$$\alpha = \pm n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{2-3-28 再掲}$$

の近傍に限定する．式 (2-3-13) を微分方程式 (A-1) の左辺に代入すると，

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[(\beta + k)(\beta + k - 1) + (\beta + k) - n^2\right] a_k(\beta) z^{\beta+k} + \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\beta) z^{\beta+k+2} \tag{2-3-32}$$

を得る．一般に，変数 β は指数方程式の根（$\alpha = \pm n$）には一致しないので，z^β の係数

$$\psi_0(\beta) a_0 = (\beta^2 - n^2) a_0 \neq 0 \tag{2-3-33a}$$

である．ここで級数 (2-3-13) の係数 $a_k(\beta)$ $(k = 1, 2, \ldots)$ をこれまで同様に

$$\left[(\beta + 1)^2 - n^2\right] a_1(\beta) = 0 \tag{2-3-33b}$$

$$\left[(\beta + k)^2 - n^2\right] a_k(\beta) + a_{k-2}(\beta) = 0 \quad (k = 2, 3, \ldots) \tag{2-3-33c}$$

により定めることにすると，式 (A-1) より非斉次微分方程式

$$z^2 y''(z, \beta) + zy'(z, \beta) + (z^2 - n^2) y(z, \beta) = (\beta^2 - n^2) a_0 z^\beta \tag{2-3-34}$$

を得る．ここにプライム記号 (prime：$'$) は変数 z に関する微分を意味する．もちろん $\beta = \alpha = \pm n$ のとき，

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - n^2)y = (\alpha^2 - n^2) a_0 z^\alpha = 0 \tag{2-3-34a}$$

である．

まず，指数方程式が重根（$\alpha = n = 0$）をもつ場合を考える．非斉次微分方程式 (2-3-34) を変数 β について偏微分すると，

$$\left[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + z^2\right] \frac{\partial y(z, \beta)}{\partial \beta} = a_0 \left[2\beta + \beta^2 \log z\right] z^\beta \tag{2-3-35}$$

を得るが，式 (2-3-35) に指数方程式の根 $\beta = \alpha = 0$ を代入すると，右辺は 0 になる．

$$\left(z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + z^2\right) \frac{\partial y(z, \beta)}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} = 0 \tag{2-3-35a}$$

すなわち，

$$\frac{\partial y(z, \beta)}{\partial \beta}\bigg|_{\beta=0} = \left[\log z \sum_{k=0}^{\infty} a_k(\beta) z^{\beta+k} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{da_k(\beta)}{d\beta} z^{\beta+k}\right]_{\beta=0}$$

$$= J_0(z) \log z + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{da_k(\beta)}{d\beta} z^{\beta+k}\bigg]_{\beta=0} \tag{2-3-36}$$

が，指数方程式が重根（$\alpha = n = 0$）をもつ場合の第 2 の解である．

式 (2-3-36) の右辺第 2 項中の $da_k(\beta)/d\beta]_{\beta=0}$ を直接計算してもよいが，右辺第 2 項が解析関数のテイラー級数展開であることに注意し，テイラー級数展開式を式 (A-1) に代入しその係数を決定することもできる（演習問題 2-5）．こうして，0 次の**第 2 種ベッセル関数**

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(z)\left(\log\frac{z}{2} + \log\gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(\psi(m+1) + \log\gamma)z^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right] \tag{2-3-37}$$

を得る．ここに，$\log\gamma, \psi(m)$ はそれぞれオイラー定数とプサイ関数である（5-6 節 C）．

次に，指数方程式が互いに整数の差をもつ根（$\alpha_1 = 1, \alpha_2 = -1$）を有する場合（$\nu = 1$）を考える．第 1 の解は式 (A-2a) で $\nu = 1$ とおいた

$$J_1(z) = z\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m+1}m!\Gamma(m+2)} \tag{2-3-38}$$

である．

指数方程式のもう一つの根（$\alpha_2 = -1$）に対応する解を求めるにあたり，漸化式 (2-3-27c) を用いると，$k = 2$ のとき

$$0\cdot a_2 + a_0 = 0$$

となり，$a_0 \neq 0$ であるから係数 a_2 およびそれ以降の係数 a_{2k} $(k = 2, 3, \ldots)$ を定めることができなくなる．そこで，この不都合を避けるべく，任意定数 $a_0 \neq 0$ の代わりに

$$a_0(\beta) \equiv ((\beta+1)^2 - 1^2)((\beta+2)^2 - 1^2)a_0 \tag{2-3-39}$$

を用いる．このとき，微分方程式 (2-3-34) は

$$z^2y''(z,\beta) + zy'(z,\beta) + (z^2-1)y(z,\beta) = (\beta^2-1)((\beta+1)^2-1)((\beta+2)^2-1)a_0z^{\beta} \tag{2-3-40}$$

となる．

さて，非斉次微分方程式 (2-3-40) を変数 β について偏微分し，その結果において指数方程式の根 $\beta = \alpha_2 = -1$ を代入すると，$\beta = \alpha_2 = -1$ は式 (2-3-40) の右辺の重根であるため，

$$\left(z^2\frac{d^2}{dz^2} + z\frac{d}{dz} + z^2 - 1\right)\frac{\partial y(z,\beta)}{\partial\beta}\Bigg]_{\beta=-1} = 0 \tag{2-3-41}$$

を得る．すなわち，

$$\begin{aligned}\frac{\partial y(z,\beta)}{\partial\beta}\Bigg]_{\beta=-1} &= \left[\log z\sum_{k=1}^{\infty}a_k(\beta)z^{\beta+k} + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{da_k(\beta)}{d\beta}z^k\right]_{\beta=-1}\\ &= J_{-1}(z)\log z + \sum_{k=0}^{\infty}\frac{da_k(\beta)}{d\beta}z^k\Bigg]_{\beta=-1}\end{aligned} \tag{2-3-42}$$

が，指数方程式が互いに整数の差をもつ根 ±1 を有する場合の第 2 の解である．全体にかかる係数を適当に選択することにより，1 次の**第 2 種ベッセル関数**

$$Y_1(z) = \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{z}{2}\right)J_1(z) - \frac{2}{\pi z}\sum_{m=0}^{n-1}\frac{(m)!(z^2/4)^m}{m!}$$
$$-\frac{z}{2\pi}\sum_{m=0}^{\infty}(\psi(m+1)+\psi(m+2))\frac{(-z^2/4)^m}{m!(m+1)!} \tag{A-2b}$$

を得る（具体的方法は演習問題 2-5 解答にならう）．

2-4　非正規特異点まわりの局所漸近解析

1-4 節において，微分方程式の係数特異点 $z_0(\neq \infty)$ が正規特異点でないとき，すなわち正規解以外の解（非正規解）が少なくとも一つ現れる特異点を非正規特異点と定義した．したがって，非正規特異点はその微分方程式の少なくとも一つの解の真性特異点であり，非正規特異点近傍における解の振る舞いを記述するためには，漸近級数解を求めなければならない．その標準的手法を次の 2 階線形微分方程式を用いて説明しよう．

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + p_0(z)y(z) = 0 \tag{2-4-1}$$

代表的な特殊関数（ベッセル関数，エイリー関数，放物円筒関数など）の 2 階線形微分方程式

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0 \tag{A-1}$$

$$y'' = zy \tag{B-1}$$

$$y'' - \left(\frac{z^2}{4} + k\right)y = 0$$

においては $z = \infty$ が非正規特異点であり（演習問題 2-6），これらの関数の $z \to \infty$ の極限における振る舞いを調べることが，応用上しばしば重要になる（[5]）．

さて，微分方程式 (2-4-1) に，

$$y(x) = \exp(Q(x)) \tag{1-1-26 再掲}$$

を代入し，共通因数 $\exp(Q(x))$ で割ると，

$$\frac{d^2Q(x)}{dx^2} + \left[\frac{dQ(x)}{dx}\right]^2 + p_1(x)\frac{dQ(x)}{dx} + p_0(x) = 0 \tag{2-4-2}$$

を得る．このままでは，もとの微分方程式 (2-4-1) に比べ難易度の改善は見られないが，非正規特異点近傍において微分方程式 (2-4-2) の第 1 項と第 2 項の間には次の関係

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x \to \infty \tag{2-4-3}$$

が成立する場合がきわめて多い．その結果，微分方程式 (2-4-2) において第 1 項すなわち 2 階の（一般に「n 階の」）導関数を無視することができ，微分方程式 (2-4-2) は 1 階（非線形）微分方程式となる．通常，後者の方が容易に厳密解を得やすい．

不等式型の漸近関係 (2-4-3) を確かめるために，真性特異点付近における代表的な解の振る舞い

$$y = \exp\left(\frac{c}{(x-x_0)^m}\right) \quad (c, m > 0：定数) \tag{2-4-4a}$$

すなわち，

$$Q = \frac{c}{(x-x_0)^m} \tag{2-4-4b}$$

の場合を考えると，確かに

$$\frac{d^2Q}{dx^2} = \frac{cm(m+1)}{(x-x_0)^{m+2}} \ll \frac{(cm)^2}{(x-x_0)^{2m+2}} = \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \tag{2-4-5}$$

である．ただ，式 (2-4-4a, b) とは異なる特殊な例においてはこの条件が成立しないこともあるので，後にこの近似のもとに得られた解を吟味しなければならない．次の例で具体的にその手順を説明しよう．

■ [2 階線形微分方程式の $x = +\infty$ 近傍の局所漸近解析]

2 階線形微分方程式

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + (1-3n)\frac{dy}{dx} - a^2n^2x^{2n-1}y = 0 \quad (a > 0, n：定数) \tag{2-4-6}$$

を考察する．その厳密解（一般解）は

$$y = C(-ax^n + 1)\exp(ax^n) + D(ax^n + 1)\exp(-ax^n) \tag{2-4-7}$$

である（C, D は定数）．

変数変換 $x = 1/t$ により，$x = +\infty$ を $t = 0$ に写像すると

$$\frac{d}{dx} = -t^2\frac{d}{dt}, \quad \frac{d^2}{dx^2} = t^4\frac{d^2}{dt^2} + 2t^3\frac{d}{dt} \tag{1-4-19 再掲}$$

となり，微分方程式 (2-4-6) は

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1+3n}{t}\frac{dy}{dt} - \frac{a^2n^2}{t^{2n+2}}y = 0 \tag{2-4-8}$$

に変換されるので，$n > 0$ のとき $x = +\infty$ は非正規特異点である．

以下で，微分方程式 (2-4-6) において $n = 2$ としたものすなわち，微分方程式

$$x\frac{d^2y}{dx^2} - 5\frac{dy}{dx} - 4a^2x^3y = 0 \tag{2-4-9}$$

の解の，非正規特異点 $x = +\infty$ 近傍（$x \to +\infty$ の極限）における振る舞いを調べる．その厳密解（一般解）は，式 (2-4-7) より

$$y = C(-ax^2 + 1)\exp(ax^2) + D(ax^2 + 1)\exp(-ax^2) \tag{2-4-10}$$

である（C, D は定数）．

まず，微分方程式 (2-4-6) の解を

$$y = \exp(Q(x)) \tag{1-1-26 再掲}$$

とおき，微分方程式 (2-4-9) に代入すると，

$$x\left[\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]\exp(Q) - 5\frac{dQ}{dx}\exp(Q) - 4a^2x^3\exp(Q) = 0$$

となり，共通因子 $\exp(Q)$ で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$x\left[\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right] - 5\frac{dQ}{dx} - 4a^2x^3 = 0 \tag{2-4-11}$$

を得る．さきに一般論として述べたように，非正規特異点近傍において微分方程式 (2-4-11) の第 1 項のカッコの中の 2 項の間には一般に次の関係

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x \to +\infty \tag{2-4-3 再掲}$$

が成り立つので，微分方程式 (2-4-11) の第 1 項のカッコの中の前者すなわち高階の微分 $\dfrac{d^2Q}{dx^2}$ を無視することができ，漸近方程式

$$x\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - 5\frac{dQ}{dx} \sim 4a^2x^3 \qquad x \to +\infty \tag{2-4-12}$$

を得る．これは容易に解くことができ，

$$\frac{dQ}{dx} \sim \frac{5 \pm \sqrt{25 + 16a^2x^4}}{2x} \sim \pm 2ax \qquad x \to +\infty \tag{2-4-13}$$

すなわち，

$$Q(x) \sim \pm ax^2 \qquad x \to +\infty \tag{2-4-14}$$

を得る．ここで，$Q(x)$ が仮定 (2-4-3) を満たしていることを確認できる．また，解 (2-4-14) は厳密解 (2-4-10) の二つの基底の支配因子 $\exp(\pm ax^2)$ を正確に再現している．

次に，主要部を得るために

$$Q(x) = \pm ax^2 + R(x), \quad ax^2 \gg R(x) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-15}$$

とおき，式 (2-4-11) に代入すると，

$$x\left[\pm 2a + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\pm 2ax + \frac{dR}{dx}\right)^2\right] - 5\left(\pm 2ax + \frac{dR}{dx}\right) - 4a^2x^3 = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}16)$$

を得る．

さらに，漸近関係の両辺を微分することが許される場合がきわめて多いので，漸近関係 (2-4-15) より

$$2ax \gg R'(x), \quad 2a \gg R''(x) \qquad x \to +\infty \qquad (2\text{-}4\text{-}17)$$

を仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．式 (2-4-16) から相殺する項を取り除き，漸近関係 (2-4-17) を適用して卓越する項のみを残すと，漸近関係

$$4ax^2\frac{dR}{dx} \sim 8ax \qquad x \to +\infty \qquad (2\text{-}4\text{-}18)$$

となる．これから

$$R(x) \sim 2\log x \qquad x \to +\infty \qquad (2\text{-}4\text{-}19)$$

を得る．ここでも，$R(x)$ は仮定 (2-4-17) を満たしていることを確認できる．こうして，解の $x \to +\infty$ における主要部，すなわち $Q(x)$ の項のうち $x \to +\infty$ の極限において残存する部分

$$y(x) \sim \exp(\pm ax^2 + 2\log x) = x^2\exp(\pm ax^2) \qquad x \to +\infty \qquad (2\text{-}4\text{-}20)$$

を得る．式 (2-4-20) は線形斉次微分方程式の解であるから全体にかかる係数は任意であることを考慮すると，式 (2-4-14) より精度よく厳密解 (2-4-10) を表現していることがわかる．

さらに精度を上げるために

$$Q(x) = \pm ax^2 + 2\log x + S(x), \quad 2\log x \gg S(x) \qquad x \to +\infty$$

すなわち，

$$y(x) = x^2\exp(\pm ax^2 + S(x)), \quad 2\log x \gg S(x) \qquad x \to +\infty \qquad (2\text{-}4\text{-}21)$$

とおくのであるが，斉次線形微分方程式の解は全体にかかる係数が任意であることを考慮して，これと同等の式

$$y(x) = x^2\exp(\pm ax^2)(1 + T(x)), \quad 1 \gg T(x) \qquad x \to +\infty \qquad (2\text{-}4\text{-}22)$$

を用いるのが便利である．式 (2-4-22) を (2-4-6) に代入し相殺する項を整理すると，

$$-8x(1 + T(x)) + (-x^2 \pm 4ax^4)T'(x) + x^3T''(x) = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}23)$$

を得る．ここでも漸近関係

$$1 \gg T(x) \qquad x \to +\infty$$

の両辺を微分することが許されると仮定し，

$$\frac{1}{x} \gg T'(x), \quad \frac{1}{x^2} \gg T''(x) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-24}$$

$T(x)$ の解を得た後にこれを吟味する*2．その結果，式 (2-4-23) は漸近関係

$$T'(x) \sim \pm\frac{2}{ax^3} \qquad x \to +\infty \tag{2-4-25}$$

となり，

$$T(x) \sim \mp\frac{1}{ax^2} \qquad x \to +\infty \tag{2-4-26}$$

を得る．ここでも，$T(x)$ は仮定 (2-4-24) を満たしている．式 (2-4-26) を (2-4-22) に代入すると

$$y(x) \sim \left(x^2 \mp \frac{1}{a}\right)\exp(\pm ax^2) \qquad x \to +\infty$$

すなわち，

$$y(x) \sim C'\left(x^2 - \frac{1}{a}\right)\exp(ax^2) + D'\left(x^2 + \frac{1}{a}\right)\exp(-ax^2) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-27}$$

を得る．式 (2-4-27) はすでに厳密解 (2-4-10) に一致している（C', D' は定数）．

■ ［エィリー関数の $x \to +\infty$ の極限における漸近級数展開］

量子力学の転回点問題などで用いられる（[5] 5-6 節）エィリー関数の漸近級数展開 (B-3) を導こう．

エィリーの微分方程式

$$y'' = xy \tag{B-1}$$

は非正規特異点 $x = \pm\infty$ をもち，その一般解はエィリー関数 $Ai(x)$ と $Bi(x)$ の線形結合である．ここでも，微分方程式 (B-1) の解を

$$y = \exp(Q(x)) \tag{1-1-26 再掲}$$

とおき，微分方程式 (B-1) に代入すると，

$$\left[\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]\exp(Q) = x\exp(Q)$$

となり，共通因子 $\exp(Q)$ で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 = x \tag{2-4-28}$$

を得る．ここでも，次の漸近関係

---
*2 $1 = \lim_{\varepsilon \to 0} x^{\varepsilon}$ とみなす．

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x \to +\infty \tag{2-4-3 再掲}$$

を仮定すると，

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \sim x \qquad x \to +\infty \tag{2-4-29}$$

を得，これからただちに

$$Q(x) \sim \pm\frac{2}{3}x^{3/2} \qquad x \to +\infty \tag{2-4-30}$$

を得る．$Q(x)$ は仮定 (2-4-3) を満たしている．解の主要部を得るために

$$Q(x) = \pm\frac{2}{3}x^{3/2} + R(x), \quad \frac{2}{3}x^{3/2} \gg R(x) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-31}$$

とおき，式 (2-4-28) に代入すると，

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\pm\sqrt{x} + \frac{dR}{dx}\right)^2 = x$$

すなわち

$$\pm\frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{d^2R}{dx^2} \pm 2\sqrt{x}\frac{dR}{dx} + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 = 0 \tag{2-4-32}$$

を得る．ここでも漸近関係

$$\frac{2}{3}x^{3/2} \gg R(x) \qquad x \to +\infty$$

の両辺を微分することが許される

$$\sqrt{x} \gg R'(x), \quad \frac{1}{2\sqrt{x}} \gg R''(x) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-33}$$

と仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．この仮定の下に，式 (2-4-32) は漸近関係

$$-4x\frac{dR}{dx} \sim 1 \qquad x \to +\infty \tag{2-4-34}$$

となり，これから

$$R(x) \sim -\frac{1}{4}\log x \qquad x \to +\infty \tag{2-4-35}$$

を得る．ここでも，$R(x)$ は仮定 (2-4-33) を満たしていることを確認できる．こうして，解の $x \to +\infty$ における主要部

$$y(x) \sim \exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\log x\right) = \frac{1}{x^{1/4}}\exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-36}$$

を得る．

　さらに精度を上げるために

$$Q(x) = \pm\frac{2}{3}x^{3/2} - \frac{1}{4}\log x + S(x), \quad -\frac{1}{4}\log x \gg S(x) \qquad x \to +\infty$$

すなわち，

$$y(x) = \frac{1}{x^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2} + S(x)\right), \quad -\frac{1}{4}\log x \gg S(x) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-37}$$

とおくのであるが，これと同等の式

$$y(x) = \frac{1}{x^{1/4}} \exp\left(\pm\frac{2}{3}x^{3/2}\right)(1 + T(x)), \quad 1 \gg T(x) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-38}$$

を用いるのが便利である．式 (2-4-38) を (B-1) に代入し相殺する項を整理すると，

$$\frac{5}{16x^{9/4}}(1 + T(x)) + \left(\pm 2x^{1/4} - \frac{1}{2x^{5/4}}\right)T'(x) + \frac{1}{x^{1/4}}T''(x) = 0$$

すなわち，

$$x^2T''(x) + \left(\pm 2x^{5/2} - \frac{x}{2}\right)T'(x) + \frac{5}{16}(1 + T(x)) = 0 \tag{2-4-39}$$

を得る．今回は $T(x)$ を漸近級数展開し，

$$T(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} d_n x^{\alpha n} \quad (\alpha < 0) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-40}$$

その係数 d_n と指数 α を一挙に決定しよう．漸近級数展開 (2-4-40) を微分方程式 (2-4-39) に代入すると，

$$\pm 2\alpha d_1 x^{\alpha+3/2} + \left(\alpha^2 - \frac{3}{2}\alpha + \frac{5}{16}\right)d_1 x^{\alpha} \pm 4\alpha d_2 x^{2\alpha+3/2} + \frac{5}{16} + \cdots = 0 \tag{2-4-41}$$

を得る．まず，両辺の主要部が一致するためには，

$$\alpha + \frac{3}{2} = 0, \quad \pm 2\alpha d_1 = -\frac{5}{16} \tag{2-4-42}$$

でなければならないので，

$$\alpha = -\frac{3}{2}, \quad d_1 = \pm\frac{5}{48} \tag{2-4-43}$$

が定まる．

次に，一般項 $x^{-3n/2}$ の係数を 0 とおくと，係数 d_n の漸化式

$$\pm 4(n+1)d_{n+1} = 3\left(n + \frac{5}{6}\right)\left(n + \frac{1}{6}\right)d_n \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2-4-44}$$

を得る．その解は

$$d_n = \left(\pm\frac{3}{4}\right)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right)}{\Gamma\left(\frac{5}{6}\right)\Gamma\left(\frac{1}{6}\right)n!} = \frac{1}{2\pi}\left(\pm\frac{3}{4}\right)^n \frac{\Gamma\left(n + \frac{5}{6}\right)\Gamma\left(n + \frac{1}{6}\right)}{n!} \tag{2-4-45}$$

である．ここでガンマ関数の三重公式

$$\Gamma(3z) = \frac{1}{2\pi}3^{3z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right) \tag{C-7b}$$

において，$z = n + 1/6$ とおき，全体にかかる任意定数を $Ai(x)$ には $\sqrt{\pi}$，また $Bi(x)$ には $2\sqrt{\pi}$ と選ぶことにより，一般に用いられているエィリー関数の漸近級数展開

$$Ai(x) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-n} \qquad x \to +\infty$$

$$Bi(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} x^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{2}{3}x^{3/2}\right)^{-n} \qquad x \to +\infty \tag{B-3}$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{\Gamma(3n+1/2)}{54^n n! \Gamma(n+1/2)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

を得る．

■ [ベッセル関数の $x \to +\infty$ の極限における漸近級数展開]

次に 1-3 節に現れたベッセル関数 $x \to +\infty$ の極限における漸近級数展開の公式を求めよう．ベッセルの微分方程式

$$x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + x\frac{dy}{dx} + (x^2 - \nu^2)y = 0 \tag{A-1}$$

は非正規特異点 $x = +\infty$ をもつ．ここでも解を

$$y = \exp(Q(x)) \tag{1-1-26 再掲}$$

とおき，微分方程式 (A-1) に代入すると，

$$\left[x^2\left(\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right) + x\frac{dQ}{dx} + (x^2 - \nu^2)\right]\exp(Q) = 0 \tag{2-4-46}$$

となり，共通因子 $\exp(Q)$ で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階常微分方程式

$$x^2\left(\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right) + x\frac{dQ}{dx} + (x^2 - \nu^2) = 0 \tag{2-4-47}$$

を得る．ここで，漸近関係

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x \to +\infty \tag{2-4-3 再掲}$$

を仮定すると，1 階微分のみを含む漸近関係式

$$x^2\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + x\frac{dQ}{dx} \sim -x^2 \qquad x \to +\infty \tag{2-4-48}$$

を得，これから

$$\frac{dQ}{dx} \sim \pm i - \frac{1}{2x} \qquad x \to +\infty$$

したがって，

$$Q(x) \sim \pm ix - \frac{1}{2}\log x + C \quad (C：定数) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-49}$$

を得る．$Q(x)$ は仮定 (2-4-3) を満たしている．以下，二つの複素関数解

$$\exp(Q) \sim \exp\left(\pm ix - \frac{1}{2}\log x + C\right)$$

の代わりに，二つの独立な実関数基底の和

$$y \sim \frac{A}{\sqrt{x}}\cos(x+\varphi) + \frac{B}{\sqrt{x}}\sin(x+\varphi) \quad (A, B：定数) \qquad x \to +\infty \tag{2-4-50}$$

を採用する．

さらに精度を上げるために

$$y = \frac{R_1(x)}{\sqrt{x}}\cos(x+\varphi) + \frac{R_2(x)}{\sqrt{x}}\sin(x+\varphi) \tag{2-4-51}$$

とおき，微分方程式 (A-1) に代入すると，

$$\begin{aligned} &x^2\left[\frac{d^2R_1(x)}{dx^2}\cos(x+\varphi) + \frac{d^2R_2(x)}{dx^2}\sin(x+\varphi)\right] \\ &+ 2x^2\left[-\frac{dR_1(x)}{dx}\sin(x+\varphi) + \frac{dR_2(x)}{dx}\cos(x+\varphi)\right] \\ &+ \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)[R_1(x)\cos(x+\varphi) + R_2(x)\sin(x+\varphi)] = 0 \end{aligned} \tag{2-4-52}$$

を得る．さて，$R_1(x), R_2(x)$ の二つの関数を導入するにあたり式 (2-4-52) に加えてもう一つ条件を任意に与えることができるので，

$$x^2\frac{d^2R_1(x)}{dx^2} + 2x^2\frac{dR_2(x)}{dx} + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)R_1(x) = 0 \tag{2-4-53}$$

を課すと，式 (2-4-52, 53) から，

$$x^2\frac{d^2R_2(x)}{dx^2} - 2x^2\frac{dR_1(x)}{dx} + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)R_2(x) = 0 \tag{2-4-54}$$

を得る．

$$R_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{x^n}, \quad R_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{b_n}{x^n} \tag{2-4-55}$$

とおき，式 (2-4-53, 54) に代入すると，それぞれ

$$\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)a_0 - 2b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{n(n+1) + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\right\}a_n - 2(n+1)b_{n+1}\right]\frac{1}{x^n} = 0 \tag{2-4-56}$$

$$\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)b_0 - 2a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\left[\left\{n(n+1) + \left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)\right\}b_n + 2(n+1)a_{n+1}\right]\frac{1}{x^n} = 0 \tag{2-4-57}$$

を得，これらから，$R_1(x), R_2(x)$ の漸近展開式 (2-4-55) の係数 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を決定する漸化式

$$a_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)b_0, \quad a_{n+1} = -\frac{(2n+1)^2 - 4\nu^2}{8(n+1)}b_n \tag{2-4-58}$$

$$b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} - \nu^2\right)a_0, \quad b_{n+1} = \frac{(2n+1)^2 - 4\nu^2}{8(n+1)}a_n \tag{2-4-59}$$

を得る．これより，

$$R_1(x) \sim a_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c_{2n}}{x^{2n}} + b_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c_{2n+1}}{x^{2n+1}} \qquad x \to +\infty \tag{2-4-60}$$

$$R_2(x) \sim b_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c_{2n}}{x^{2n}} - a_0 \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{c_{2n+1}}{x^{2n+1}} \qquad x \to +\infty \tag{2-4-61}$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{(4\nu^2 - 1^2)(4\nu^2 - 3^2)\cdots(4\nu^2 - (2n-1)^2)}{8^n n!} \quad (n = 1, 2, \ldots) \tag{2-4-62}$$

が定まる．これらを式 (2-4-51) に代入し，任意に選ぶことができる位相 φ を

$$\varphi = -\frac{1}{2}\nu\pi - \frac{1}{4}\pi \tag{2-4-63}$$

とし，さらに

$$a_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \quad b_0 = 0 \tag{2-4-64}$$

と選んだものが，第1種ベッセル関数

$$J_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(P(\nu, x)\cos\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) - Q(\nu, x)\sin\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)\right) \tag{A-7}$$

であり，また逆に

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{2-4-65}$$

と選んだものが，第2種ベッセル関数

$$Y_\nu(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}}\left(P(\nu, x)\sin\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) + Q(\nu, x)\cos\left(x - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)\right) \tag{A-8}$$

である．ここに $P(\nu, x), Q(\nu, x)$ は式 (A-9a, b) で与えられる．

■ ［非正規特異点 $x = 0$ 近傍の局所解析］

微分方程式 (2-4-6) は，$n = -1$ のとき

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - a^2x^{-3}y = 0 \quad (a > 0) \tag{2-4-66}$$

となり，非正規特異点 $x = 0$ をもつ．また，変換 $x = 1/t$ により

$$\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{2}{t}\frac{dy}{dt} - a^2y = 0 \tag{2-4-67}$$

を得るので，正規特異点 $x = \pm\infty$ をもつ．なお，微分方程式 (2-4-66) の一般解は式 (2-4-7) で $n = -1$ とおいた

$$y(x) = C\left(-\frac{a}{x}+1\right)\exp\left(\frac{a}{x}\right) + D\left(\frac{a}{x}+1\right)\exp\left(-\frac{a}{x}\right) \quad （C, D：定数） \tag{2-4-68}$$

である．

以下で，微分方程式 (2-4-66) の解の非正規特異点 $x = 0$ 近傍における振る舞いを調べる．解を

$$y = \exp(Q(x)) \tag{1-1-26 再掲}$$

とおき，微分方程式 (2-4-66) に代入すると，

$$x\left[\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]\exp(Q) + 4\frac{dQ}{dx}\exp(Q) - a^2x^{-3}\exp(Q) = 0$$

となり，共通因子 $\exp(Q)$ で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$x\left[\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right] + 4\frac{dQ}{dx} - a^2x^{-3} = 0 \tag{2-4-69}$$

を得る．ここで

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x \to 0 \tag{2-4-3 再掲}$$

を仮定する．その結果，

$$x\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 + 4\frac{dQ}{dx} \sim a^2x^{-3} \qquad x \to 0 \tag{2-4-70}$$

と簡略化でき，

$$\frac{dQ}{dx} \sim \frac{-2 \pm \sqrt{4 + a^2x^{-2}}}{x} \sim \pm\frac{a}{x^2} \qquad x \to 0 \tag{2-4-71}$$

さらに，

$$Q(x) \sim \mp\frac{a}{x} \qquad x \to 0 \tag{2-4-72}$$

を得る．$Q(x)$ が仮定 (2-4-3) を満たしていることを確認でき，また，厳密解 (2-4-68) の二つの基底の支配因子

$$\exp\left(\pm\frac{a}{x}\right)$$

を正確に再現している．

さて，主要部を得るために

$$Q(x) = \pm\frac{a}{x} + R(x), \quad \frac{a}{x} \gg R(x) \qquad x \to 0 \tag{2-4-73}$$

とおき，式 (2-4-69) に代入すると，

$$x\left[\pm\frac{2a}{x^3} + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\mp\frac{a}{x^2} + \frac{dR}{dx}\right)^2\right] + 4\left(\mp\frac{a}{x^2} + \frac{dR}{dx}\right) - a^2x^{-3} = 0 \tag{2-4-74}$$

を得る．ここで，

$$\frac{a}{x^2} \gg R'(x), \quad \frac{2a}{x^3} \gg R''(x) \qquad x \to 0 \tag{2-4-75}$$

を仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．式 (2-4-74) から相殺する項を取り除き，漸近関係 (2-4-75) を適用して卓越する項のみを残すと，漸近関係

$$\frac{2a}{x}\frac{dR}{dx} \sim -\frac{2a}{x^2} \qquad x \to 0 \tag{2-4-76}$$

すなわち

$$R(x) \sim -\log x \qquad x \to 0 \tag{2-4-77}$$

を得る．$R(x)$ は仮定 (2-4-75) を満たしている．こうして，解の $x \to 0$ における主要部

$$y(x) \sim \exp\left(\pm\frac{a}{x} - \log x\right) = \frac{1}{x}\exp\left(\pm\frac{a}{x}\right) \qquad x \to 0 \tag{2-4-78}$$

を得る．これは厳密解 (2-4-68) をよく近似している．

さらに精度を上げるために

$$y(x) = \frac{1}{x}\exp\left(\pm\frac{a}{x}\right)(1 + T(x)), \quad 1 \gg T(x) \qquad x \to 0 \tag{2-4-79}$$

とおく．式 (2-4-79) を (2-4-66) に代入し相殺する項を整理すると，

$$-\frac{2}{x^2}(1 + T(x)) + \left(\mp\frac{2a}{x^2} + \frac{2}{x}\right)T'(x) - T''(x) = 0 \tag{2-4-80}$$

を得る．ここでも漸近関係

$$1 \gg T(x) \qquad x \to 0$$

の両辺を微分することが許されると仮定し，

$$\frac{1}{x} \gg T'(x), \quad \frac{1}{x^2} \gg T''(x) \qquad x \to 0 \tag{2-4-81}$$

$T(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．その結果，式 (2-4-80) は漸近関係

$$T'(x) \sim \mp\frac{1}{a} \qquad x \to 0 \tag{2-4-82}$$

となり，

$$T(x) \sim \mp\frac{1}{a}x \qquad x \to 0 \tag{2-4-83}$$

を得る．$T(x)$ は仮定 (2-4-81) を満たしている．式 (2-4-83) を (2-4-79) に代入すると

$$y(x) \sim \left(\frac{1}{x} \mp \frac{1}{a}\right)\exp\left(\pm\frac{a}{x}\right) \qquad x \to 0$$

すなわち，二つの独立な解の漸近形

$$\left.\begin{aligned} y(x) &\sim C\left(-\frac{a}{x} + 1\right)\exp\left(\frac{a}{x}\right) \quad (C：定数) \qquad x \to 0 \\ y(x) &\sim D\left(\frac{a}{x} + 1\right)\exp\left(-\frac{a}{x}\right) \quad (D：定数) \qquad x \to 0 \end{aligned}\right\} \tag{2-4-84}$$

を得る．式 (2-4-84) はすでに厳密解 (2-4-68) に一致している．

2-5 非斉次線形微分方程式

非斉次線形微分方程式においては，その有意の特解を一つ発見できれば，対応する斉次線形微分方程式の一般解をそれに加えることにより一般解を構築することができる．特解を導く代表的方法は定数変化法あるいはグリーン関数法である．

すなわち，2 階非斉次線形微分方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = r(x) \tag{2-5-1}$$

に対応する斉次方程式

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0 \tag{2-5-2}$$

の二つの独立な特解 $y_1(x), y_2(x)$ が既知であるとき，これから非斉次微分方程式 (2-5-1) の一般解

$$y(x) = Ay_1(x) + By_2(x) - y_1(x)\int^x \frac{r(t)y_2(t)}{W(t)}\,dt + y_2(x)\int^x \frac{r(t)y_1(t)}{W(t)}\,dt \tag{2-5-3}$$

を得る．ここに

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix} \tag{2-5-4}$$

はロンスキー行列式 (2-1-3) の 2 次元版である．なお右辺第 1, 2 項の和が斉次微分方程式の一般解である．式 (2-5-3) の型，すなわち積分表示の解の漸近解析（[5] 第 3 章）と対比される手法として，本節では非斉次微分方程式 (2-5-1) そのものの局所漸近解析により解を初等関数で表現する方法を解説する．

[通常点（テイラー級数展開）]

まず，非斉次線形微分方程式の通常点まわりの局所解析を行う．1 階非斉次線形微分方程式

$$y' + y = x^2 \tag{2-5-5}$$

の一般解の原点まわりの局所的振る舞いを調べよう．原点は非斉次微分方程式 (2-5-5) に対応する斉次微分方程式

$$y' + y = 0 \tag{2-5-6}$$

の通常点であり，しかも非斉次項 x^2 は原点近傍で正則である．したがって，通常点まわりのテイラー級数展開

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \tag{2-5-7}$$

の存在を仮定する．式 (2-5-7) を (2-5-5) に代入すると x に関する恒等式

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+1)a_{k+1} + a_k]x^k = x^2 \tag{2-5-8a}$$

を得る．両辺の x の等しいベキの係数を等置すると，係数 a_k の漸化式

$$\begin{aligned} &(k+1)a_{k+1} + a_k = 0, \quad k \neq 2 \\ &3a_3 + a_2 = 1 \end{aligned} \tag{2-5-8b}$$

を得，これから，a_0 を任意定数とするテイラー級数展開 (2-5-7)

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= -a_0 \\ a_2 &= \frac{a_0}{2} \\ a_k &= (-1)^{k-1} \cdot \frac{2-a_0}{k!} \quad (k \geqq 3) \end{aligned}\right\} \tag{2-5-9}$$

が確定する．なお，微分方程式 (2-5-5) に係数特異点は存在しないので，テイラー級数展開 (2-5-7) の収束半径 R は$+\infty$ である（5-2 節）．

$$\frac{1}{R} = \lim_{k\to\infty} \left| \frac{a_{k+1}}{a_k} \right| = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = 0$$

なお，本問題の厳密解は

$$y(x) = x^2 - 2x + 2 + Ce^{-x} \quad (C : \text{定数}) \tag{2-5-10}$$

であり，そのテイラー級数展開の係数は

$$a_0 = C + 2 \tag{2-5-11}$$

により式 (2-5-9) に一致する．

■ [非斉次項の特異点]

次に，1 階非斉次線形微分方程式

$$y' - xy = \frac{1}{x^2} \tag{2-5-12}$$

の一般解の原点まわりの局所的振る舞いを調べよう．この例において，原点は対応する斉次微分方程式

$$y' - xy = 0 \tag{2-5-13}$$

の通常点であるが非斉次項 $1/x^2$ の特異点である．したがって，原点まわりのテイラー級数展開は存在せず，局所漸近解析が必要になる．

まず，微分方程式 (2-5-12) の 3 項のうち卓越平衡にある 2 項の組合せを調べると，矛盾が生じない組合せは

$$y' \sim \frac{1}{x^2} \gg xy \qquad x \to 0 \tag{2-5-14}$$

であることがわかる（演習問題 2-10）．これから，解の主要部

$$y(x) \sim -\frac{1}{x} \qquad x \to 0 \tag{2-5-15}$$

を得る．なお，対応する斉次微分方程式 (2-5-13) の一般解は，

$$y' = xy \tag{2-5-16}$$

から導かれるのであるから，非斉次微分方程式 (2-5-12) の解は斉次微分方程式 (2-5-13) の解より特異性が強いことを意味する．

高次の項を求めるために

$$y(x) = -\frac{1}{x} + R(x), \quad -\frac{1}{x} \gg R(x) \qquad x \to 0 \tag{2-5-17}$$

とおき，式 (2-5-12) に代入すると，

$$\frac{1}{x^2} + 1 - xR(x) + R'(x) = \frac{1}{x^2} \tag{2-5-18}$$

を得る．相殺する項を取り除いた後の卓越項は，

$$-1 \sim R'(x) \qquad x \to 0 \tag{2-5-19}$$

であるから，

$$R(x) \sim C - x \quad (C：定数) \qquad x \to 0 \tag{2-5-20}$$

を得る．このプロセスを続行すると，微分方程式 (2-5-12) の解の原点まわりの局所的振る舞い

$$y(x) \sim -\frac{1}{x} + C - x + \frac{Cx^2}{2} + o(x^2) \qquad x \to 0 \tag{2-5-21}$$

を得る．ここに C は一般解に含まれる積分定数であり，初期条件により定まる．

なお，本問題の厳密解（一般解）は

$$y(x) = \exp(x^2/2)\int^x \frac{\exp(-t^2/2)dt}{t^2} \tag{2-5-22}$$

である．

■ ［斉次方程式の特異点］

対応する斉次方程式に特異点が存在する場合にその特異点まわりの局所的振る舞いを調べる．特に，対応する斉次微分方程式の解より，非斉次方程式の解の特異性が強い場合が興味深い．

1階非斉次線形微分方程式

$$y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2} \quad (x > 0) \tag{2-5-23}$$

を考える．原点は対応する斉次微分方程式

$$y' + \frac{y}{\sqrt{x}} = 0 \tag{2-5-24}$$

の特異点である．まず，微分方程式 (2-5-23) の3項のうち卓越平衡にある2項の組合せを調べると，矛盾が生じない組合せは

$$y' \sim \frac{1}{x^2} \gg \frac{y}{\sqrt{x}} \qquad x \to 0+ \tag{2-5-25}$$

であることがわかる（演習問題2-11）．これから，解の主要部

$$y(x) \sim -\frac{1}{x} \qquad x \to 0+ \tag{2-5-26}$$

を得る．高次の項を求めるために

$$y(x) = -\frac{1}{x} + R(x), \quad -\frac{1}{x} \gg R(x) \qquad x \to 0+ \tag{2-5-27}$$

とおき，式 (2-5-23) に代入すると，

$$\frac{1}{x^2} + R'(x) - \frac{1}{x^{3/2}} + \frac{R(x)}{\sqrt{x}} = \frac{1}{x^2} \tag{2-5-28}$$

を得る．相殺する項を取り除いた後の卓越項は，

$$R'(x) \sim \frac{1}{x^{3/2}} \qquad x \to 0+ \tag{2-5-29}$$

であるから，

$$R(x) \sim -\frac{2}{\sqrt{x}} \qquad x \to 0+ \tag{2-5-30}$$

を得る．このプロセスを続行すると，微分方程式 (2-5-23) の解の原点まわりの局所的振る舞い

$$y(x) \sim -\frac{1}{x} - \frac{2}{\sqrt{x}} + 2\log x + C - 4\sqrt{x}\log x + 8\sqrt{x} + o(\sqrt{x}) \quad x \to 0+ \tag{2-5-31}$$

を得る．C は一般解に含まれる積分定数であり，初期条件により定まる．なお，本問題の厳密解は

$$y(x) = \exp(-2\sqrt{x}) \int^x \frac{\exp(2\sqrt{t})dt}{t^2} \tag{2-5-32}$$

である．

第 2 章の演習問題

2-1　ロンスキー行列式の微分方程式 (2-1-4a) を導け.

2-2　漸化式 (2-1-30) の初期条件 (2-1-29) を満足する特解は,

$$y_l(t) = s_l(t) \equiv \frac{t(t-1)\cdots(t-l+2)}{\lambda_k^{l-1}(l-1)!} \tag{2-1-31}$$

であること, さらにこれを用いて, 一般解が

$$y_l(t) = \sum_{i=1}^{l} s_i(t)u_i(t) \tag{2-1-32}$$

であることを示せ.

2-3　通常点においてフロベニウス級数の解を仮定するとテイラー級数になることを示せ.

2-4　二つの解 $J_{-n}(z), J_n(z)$ はベッセルの微分方程式 (A-1) の一次独立な基底となるが, 次数 ν が整数 n に等しいときは, これら二つの解は一次従属であることを示せ.

2-5　テイラー級数展開式を式 (A-1) に代入することにより 0 次の**第 2 種ベッセル関数**

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}\left[J_0(z)\left(\log\frac{z}{2} + \log\gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{(-1)^{m-1}(\psi(m+1)+\log\gamma)z^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right] \tag{2-3-37}$$

を求めよ. ここに, $\log\gamma, \psi(m)$ はそれぞれオイラー定数とプサイ関数である (5-6 節 C).

2-6　ベッセルの微分方程式, エィリーの微分方程式, 放物円筒関数([5])の微分方程式

$$z^2y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0 \tag{A-1}$$

$$y'' = zy \tag{B-1}$$

$$y'' - \left(\frac{z^2}{4} + k\right)y = 0$$

においては $z = \infty$ が非正規特異点であることを示せ.

2-7　ベッセル関数の $x \to +\infty$ の極限における漸近級数展開の解法にならい, エィリー関数の $x \to -\infty$ の極限における漸近級数展開式を導け.

2-8　微分方程式 (2-4-66) は非正規特異点 $x = 0$ 近傍でフロベニウス級数解をもたないことを示せ.

2-9　微分方程式 $x^4y'' + x^2y' - y = 0$ の非正規特異点 $x = 0$ まわりの振る舞いを主要部の次の補正項まで調べよ.

2-10　微分方程式 (2-5-12) の一般解の原点まわりの局所的振る舞いを調べるとき, その 3 項のうち卓越平衡にある 2 項の組合せは

$$y' \sim \frac{1}{x^2} \gg xy \qquad x \to 0 \tag{2-5-14}$$

であることを示せ.

2-11　微分方程式 (2-5-23) の一般解の原点まわりの局所的振る舞いを調べるとき, その 3 項のうち卓越平衡にある 2 項の組合せは

$$y' \sim \frac{1}{x^2} \gg \frac{y}{\sqrt{x}} \qquad x \to 0+ \tag{2-5-25}$$

であることを示せ.

2-12 行列 A (2-1-8) と B (2-1-14) の固有値が一致することを示せ.

第3章

非線形常微分方程式の位相空間解析（臨界点の局所解析）

厳密解を得ることのできる非線形常微分方程式の種類はきわめて少なく，体系的解法は 5-1 節にまとめられている数少ない方法に限られている．厳密解が存在する場合にもその多くは積分表示などの複雑な形をとり，解の定性的性質をうかがい知ることすら困難である．それゆえ，非線形常微分方程式の解そのものを求めるのではなく，非線形常微分方程式を直接局所解析することにより，解の局所的ひいては大域的振る舞いを得る必要が生ずる．

本章では，微分方程式の位相空間上における臨界点近傍の局所解析法を紹介する．本法は**局所解析**（local analysis）であるにもかかわらず，解の**大域的性質**（global property）を微分方程式を実際に解くことなく見通すことができ，その結果，一般解（解曲線群）の定義域全体にわたる安定性を初めとする定性的性質を得ることのできるすこぶる有効な解析法であり，特に 2 階非線形常微分方程式に力を発揮する．また解曲線群に共通する一般的性質を明らかにするという意味で，微分方程式の個々の解の具体的な数値を得るだけである数値解析法より格段に優れている．したがって，厳密解を得ることのできない非線形微分方程式の数値解を求める前にまず試すべき解析法であり，また数値解の定性的・定量的検証材料となる．なお，本章においては，独立変数を時間と解釈すると理解しやすいので変数 x の代わりに t を用いる．

3-1　自律系微分方程式と臨界点

独立変数 t が陽に現れない微分方程式

$$F(y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n)}(t)) = 0 \tag{3-1-1a}$$

あるいはこれを最高階の導関数 $y^{(n)}(t)$ について解いた陽形式

$$y^{(n)}(t) = f(y(t), y'(t), y''(t), \ldots, y^{(n-1)}(t)) \tag{3-1-1b}$$

を n 階**自律系微分方程式**（n-th order autonomous differential equations）と呼ぶ．以下，式 (3-1-1b) を用いる．なお，自律系でない任意の $n-1$ 階微分方程式は，それを独立変数 t について解き，その結果を t で 1 階微分することにより，n 階自律系微分方程式に変換することができる（演習問題 3-1）．

n 階自律系微分方程式 (3-1-1b) は，新しい変数

$$y_0(t) \equiv y(t), \quad y_j(t) \equiv y^{(j)}(t) \quad (j = 1, \ldots, n-1) \tag{3-1-2}$$

を導入することにより，n 元連立 1 階自律系微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} y_j(t) = y_{j+1}(t) \quad (j = 0, \ldots, n-2) \quad \text{および} \\ &\frac{d}{dt} y_{n-1}(t) = f(y_0(t), y_1(t), y_2(t), \ldots, y_{n-1}(t)) \end{aligned} \tag{3-1-3}$$

に変換することができる．そこで以下では，n 階自律系常微分方程式 (3-1-1b) と等価な n 元連立常微分方程式系 (3-1-3) をさらに一般化した，任意の n 元連立 1 階自律系常微分方程式系

$$\frac{d}{dt} y_k(t) = f_k(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t)) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3-1-4}$$

を考察する．なお，関数 $f_k(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$ はすべての変数 y_k について 1 価，連続かつ微分可能であるとする．

このとき，連立微分方程式系 (3-1-4) は，その解である「n 次元位相空間の点」$(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ の時間経過に伴う運動を記述する発展方程式（evolution equation）とみなすことができる．解 $(y_1(t), y_2(t), \ldots, y_n(t))$ は時間の経過とともに位相空間を移動し，解曲線・軌跡（trajectory）を描く．その際，$f_k(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ の連続・微分可能性により**解の存在と一意性**が保証されるので，任意の初期条件すなわち n 次元位相空間内の点

$$y_k(0) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3-1-5}$$

を通る軌跡が必ず存在し，しかもそれはただ一つである（5-3 節）．また，任意の 2 本の解曲線（軌跡）が互いに交わることはない．なぜならば，仮に 2 本の軌跡が互いに交わるとすると，その n 次元位相空間内の交点を初期条件とする解の一意性が成立しなくなるからである．

■ [臨界点]

連立微分方程式 (3-1-4) の右辺 $f_k(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ がすべて同時に 0 となる n 次元位相空間の点，すなわち，連立代数方程式

$$f_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) = 0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{3-1-6}$$

を満たす点 $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ が存在するとき，その点は n 次元位相空間の解曲線（軌跡）の縮退したものである．すなわち，この点においては速度

$$\frac{d}{dt}y_k = f_k(y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, \ldots, n)$$

が 0 であるから，n 次元位相空間の解 $y_k(t)$ $(k = 1, \ldots, n)$ は永久に同じ点に留まる．このような点，すなわち式 (3-1-6) を満たす n 次元位相空間の点を**臨界点**（critical points）と呼ぶ[*1]．解 $y_k(t)$ は解曲線（軌跡）上で臨界点に限りなく近づくことはできるが，有限の時間で到達することはできない．

位相空間内の異なる解曲線（軌跡）が互いに交わることがないという性質から，2 次元以下では解の実り多い定性的性質を得られるが，3 次元以上の位相空間解析は研究途上である．そこで，3-2 節以降では 2 次元問題（位相平面解析）

$$\frac{dy}{dt} = f_1(y, z), \quad \frac{dz}{dt} = f_2(y, z) \tag{3-1-7}$$

に限定し，かつ例外を除き孤立した臨界点を対象として，この局所的位相空間解析がどのようにして解の大域的性質を導くことができるのかを見てゆく．なお，1 次元問題（**位相線**（phase line））は演習問題 3-3 に譲る．

連立微分方程式 (3-1-7) において独立変数 t を媒介変数とみなしこれを消去すると，y を独立変数とする新しい関数 $z(y) \equiv y'(t)$ の単独の 1 階非自律系微分方程式

$$\frac{dz(y)}{dy} = \frac{f_2(y, z)}{f_1(y, z)} \tag{3-1-8}$$

を得る[*2]．したがって，t を独立変数とする 2 元連立自律系微分方程式 (3-1-7) の位相平面上の臨界点 (y_c, z_c) は，同じ位相平面上の y を独立変数とする 1 階微分方程式 (3-1-8) の右辺の分母・分子を同時に 0 にする点，すなわち存在一意性特異点に対応する．1-4-3 項の例 1〜例 3 の存在一意性特異点である原点は臨界点（螺旋点，節，中心）である．

3-2　位相平面上の解曲線

時刻 t における位置 $y(t)$ と速度 $z(t) \equiv y'(t)$ を座標軸とする (y, z) 空間を，2 次元であるゆえ**位相平面**（phase plane）と呼ぶ[*3]．2 階自律系微分方程式（任意の 1 階微分方程式

[*1] 臨界点という言葉は幅広い分野でさまざまな意味に用いられている．微分方程式論の範疇に限定しても，文献によっては「真性特異点をかねる分岐」を臨界点と呼ぶことがある [6]．

[*2] 一般に，n 階自律系微分方程式 (3-1-1) の解である関数の導関数 $y'(t)$ を，y を独立変数とする新しい関数 $Z(y) \equiv y'(t)$ で置き換えると，$y(t)$ の k 階の導関数 $y^{(k)}(t)$ は $Z(y)$ の $k-1$ 階以下の導関数で表すことができる．その結果，関数 $y(t)$ の n 階自律系微分方程式を関数 $Z(y)$ の $n-1$ 階非自律系微分方程式に変換し，階数を一つ下げることができる（演習問題 3-2）．

[*3] 解析力学においては速度の代わりに運動量 $p(t) \equiv my'(t)$ を用いる．m は粒子の質量．

を含む）の位相平面解析は，その解の大域的性質を視覚的に容易に理解できるのでことのほか有効である．

本節ではいくつかの代表的な例題の一般解に対応する，位相平面上の解曲線群を採り上げる．解曲線群の形状および解曲線（軌跡）上の解 $(y(t), z(t))$ の運動方向により解の安定性を判断することができる．一般解（解曲線群）の性質を知る上で，時刻 t を独立変数（横軸）とするグラフ $y = y(t)$ および $z = z(t)$ を個別に調べるのと比べて，位相平面上の解 $(y(t), z(t))$ の軌跡である解曲線群 $z = Z(y)$ 一つを調べる方が格段に有効であることを以下の数例のみからも実感できるだろう．

例1　保存系調和振動子

保存系調和振動子の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = 0 \tag{3-2-1}$$

の位相平面上の解曲線（軌跡）は臨界点を周回する閉曲線（楕円）である．実際，式 (3-2-1) は連立1階微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = z \tag{3-2-2a}$$

$$\frac{dz}{dt} = -\omega^2 y \tag{3-2-2b}$$

と等価であり，その解は

$$y = A\cos(\omega t + \alpha) \tag{3-2-3}$$

$$z = y' = -A\omega\sin(\omega t + \alpha) \quad (A, \alpha：\text{定数}) \tag{3-2-4}$$

である．独立変数 t を媒介変数とみなし消去すると，調和振動子の位相平面上の軌跡・原点（臨界点）を周回する楕円（図 3-1）

$$\frac{y^2}{A^2} + \frac{z^2}{(A\omega)^2} = 1 \tag{3-2-5}$$

を得る．

t を独立変数とする微分方程式 (3-2-1) の解 (3-2-3) すなわち正弦関数が周期関数であることを理解するためには初等関数の知識を必要とするが，図 3-1 の軌跡（閉曲線）を一瞥するだけで中学生にも微分方程式 (3-2-1) の解が周期解であることを理解できるだろう．

なお，位相平面上の軌跡 (3-2-5) は，線形微分方程式 (3-2-1) と等価な y を独立変数とする非線形微分方程式

$$\frac{dz}{dy}z + \omega^2 y = 0 \tag{3-2-6}$$

の解曲線 $z = Z(y)$ と理解することもできる.

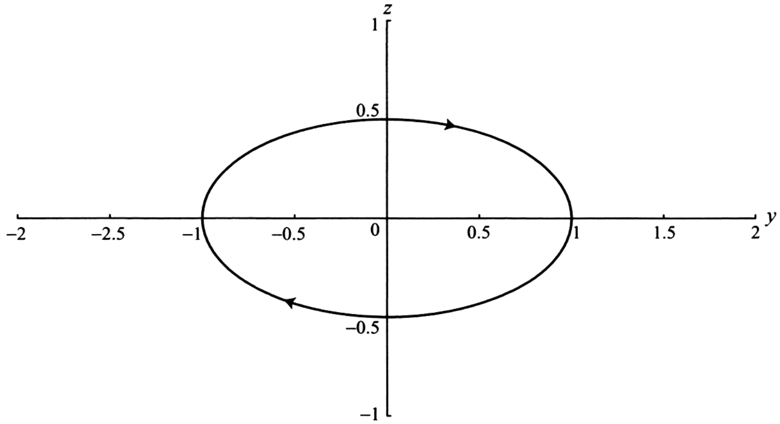


図 3-1　保存系調和振動子の微分方程式 (3-2-1) の位相平面上の解曲線 (3-2-5) の一例 ($A = 1, \omega = 0.5, \alpha = 0$)

■

例 2　散逸系調和振動子

散逸系調和振動子の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega^2 y = -2\varepsilon\omega\frac{dy}{dt} \quad (\varepsilon > 0) \tag{3-2-7}$$

の位相平面上の解曲線は安定な螺旋となる．実際，微分方程式 (3-2-7) の一般解およびその 1 階導関数は

$$y = A\exp(-\varepsilon\omega t)\cos(\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2} + \alpha) \tag{3-2-8}$$

$$z = y' = A\omega\exp(-\varepsilon\omega t)\left[-\sqrt{1-\varepsilon^2}\sin(\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2} + \alpha) - \varepsilon\cos(\omega t\sqrt{1-\varepsilon^2} + \alpha)\right]$$

$$(A, \alpha：定数) \tag{3-2-9}$$

である（[5] 第 1 章）．その位相平面上の閉曲線群は原点（臨界点）に収束する螺旋（図 3-2）であり，一般解の安定性は一目瞭然である．

なお，位相平面上の軌跡（3-2-8, 9：図 3-2）は，線形微分方程式 (3-2-7) と等価な y を独立変数とする非線形微分方程式

$$\frac{dz}{dy} = -\frac{\omega^2 y}{z} - 2\varepsilon\omega \tag{3-2-10}$$

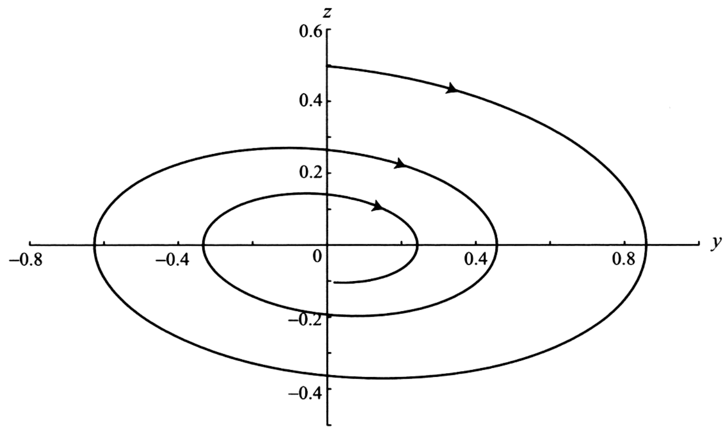


図 3-2　散逸系調和振動子の微分方程式 (3-2-7) の位相平面上の解曲線 (3-2-8, 9) の一例 ($A = 1, \omega = 0.5, \varepsilon = 0.1, \alpha = -\pi/2$)

の解曲線 $z = Z(y)$ と理解することもできる．■

例3　ダフィン方程式

ダフィン方程式 (Duffing's equation)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{3-2-11}$$

の両辺に dy/dt をかけると，保存系微分方程式

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{y^2}{2} + \frac{\varepsilon y^4}{4}\right] = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{3-2-12}$$

を得る．したがって，解の位相平面上の軌跡は原点（臨界点）を周回する閉曲線

$$y^2 + \frac{\varepsilon y^4}{2} + z^2 = C \quad （C：定数） \tag{3-2-13}$$

である（図 3-3）．■

例4　ファン・デル・ポール方程式

ファン・デル・ポール方程式 (Van der Pol's equation)

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 1\right)\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{3-2-14}$$

の複スケール解析による近似解の主要部は，

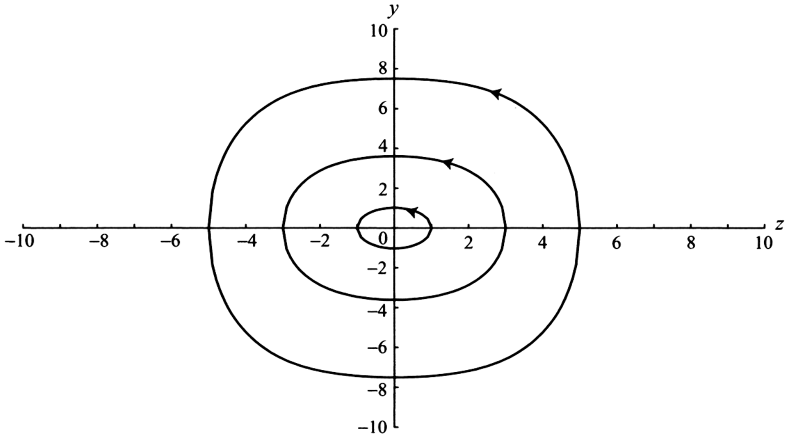


図 3-3　ダフィン方程式 (3-2-11) の位相平面上の解曲線群 (式 (3-2-13), $\varepsilon = 0.1$)

$$y = \frac{2R_0}{\sqrt{\exp(-\varepsilon t) + R_0^2(1 - \exp(-\varepsilon t))}} \cos(t + \theta_0) \quad (R_0, \theta_0 : 定数) \tag{3-2-15}$$

であり（[5] 第 6 章），すべての解 $(y(t), z(t))$ は初期条件にかかわらず，$\varepsilon t \to +\infty$ の極限において位相平面上における**極限循環軌道**（limit cycle）（3-5 節）

$$y = 2\cos(t + \theta_0) \tag{3-2-16}$$

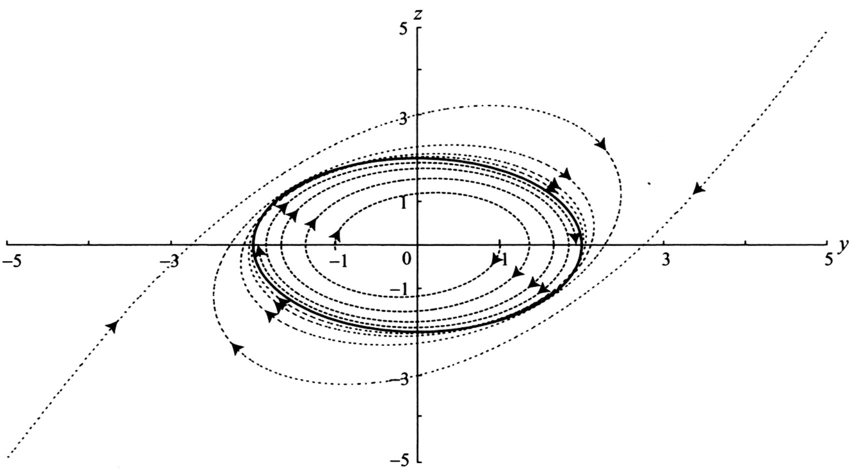


図 3-4　ファン・デル・ポール方程式 (3-2-14) の位相平面上の極限循環軌道
(実線：式 (3-2-17) に内外側から収束する解曲線群 (点線：式 (3-2-15))

すなわち，

$$y^2 + z^2 = 4 \tag{3-2-17}$$

に内外から収束することは，これまた一目瞭然である（図3-4）．

以上の例から明らかなように，解曲線の形状と解 $(y(t), z(t))$ の運動方向から微分方程式の一般解の大域的性質（収束・発散など）を理解することができる．解曲線群のこれらの性質が微分方程式の臨界点の型と深くかかわりあっていることを3-3節から3-6節でみていく．■

3-3　位相平面における臨界点の分類

本節では位相平面における臨界点の型を，解の安定性[*4]と解曲線の幾何学的形状により分類する．まず，位相平面上の解 $(y(t), z(t))$ の**安定性**に関連して，$t \to \pm\infty$ の極限における解の振る舞いは次の五つの型に分類できる．

（1）　解が永遠に臨界点に留まる．
（2）　解が $t \to +\infty$ の極限において臨界点に収束する（例：図3-2, 3-5a）．
（3）　解が $t \to -\infty$ の極限において臨界点に収束する（例：図3-5(b)）．
（4）　解が $t \to +\infty$ の極限において，その内側および外側から螺旋軌道を描きつつ閉軌道に収束する（例：図3-4）．
（5）　解の集合（解曲線）が閉軌道を形成する（例：図3-1, 3-3）．

このうち，(3)の型の解は不安定であり，その他の型の解は安定である．なお，(1)から(3)の型は1次元位相空間（位相線）においても現れるが（演習問題3-3），(4)，(5)は2次元以上の位相空間に新たに現れる型である．

一方，臨界点近傍における解曲線群の**幾何学的形状**は次の四つの型に分類できる．

（1）節（nodes）

臨界点近傍のすべての解 $(y(t), z(t))$ が $t \to \pm\infty$ の極限において直線に漸近する軌跡を描きつつ臨界点に収束するとき，その臨界点の型を**節**と呼ぶ．

例　**y 軸に漸近する解曲線群をもつ節**

連立1階線形微分方程式

[*4] 解の安定性：臨界点近傍の解 $(y(t), z(t))$ が $t \to +\infty$ にいたるまで終始，近傍に留まるとき，解は安定であるという．

$$\frac{dy}{dt} = \mp y \tag{3-3-1a}$$

$$\frac{dz}{dt} = \mp 2z \quad （複合同順） \tag{3-3-1b}$$

の解は

$$y = Ae^{\mp t} \quad (A：定数) \tag{3-3-2a}$$

$$z = Be^{\mp 2t} \quad (B：定数) \tag{3-3-2b}$$

である．これから媒介変数 t を消去すると位相平面上の軌跡，すなわち直線 $z = 0$ に漸近しつつ臨界点 $(0, 0)$ に収束する放物線

$$z = Cy^2 \quad (C：定数) \tag{3-3-3}$$

および y 軸 $(B = 0)$，z 軸 $(A = 0)$ を得る．このうち，$t \to +\infty$ の極限においてすべての解 $(y(t), z(t))$ が臨界点 $(0, 0)$ に収束するもの（複合上）が，**安定な節**（stable nodes）であり，すべての解 $(y(t), z(t))$ が臨界点 $(0, 0)$ から遠ざかるもの（複合下）が，**不安定な節**（unstable nodes）である（図 3-5a, b）．

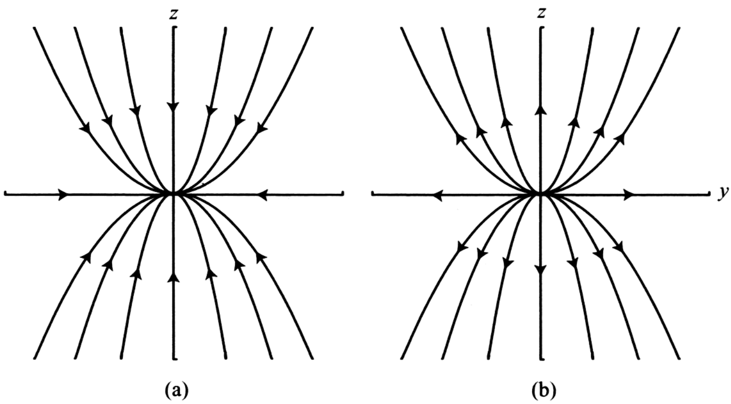


図 3-5　(a) 位相平面上の臨界点：安定な節近傍の解曲線群 (3-3-3)
(b) 位相平面上の臨界点：不安定な節近傍の解曲線群 (3-3-3)

■

■［極座標表示］

臨界点のうち，次項の螺旋点および中心の近傍における解曲線を記述するために極座標 (r, θ)

$$y = r\cos\theta, \quad z = r\sin\theta \tag{3-3-4}$$

が便利である．そこでまず，極座標表示の自律系常微分方程式

$$\frac{dr}{dt} = R(r,\theta) \tag{3-3-5a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \Theta(r,\theta) \tag{3-3-5b}$$

と等価な直角座標 (y,z) 表示の自律系微分方程式を得ておこう．二つの座標系の変換は

$$\frac{dr}{dt} = \frac{dy}{dt}\cos\theta + \frac{dz}{dt}\sin\theta \tag{3-3-6a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\sin\theta}{r}\frac{dy}{dt} + \frac{\cos\theta}{r}\frac{dz}{dt} \tag{3-3-6b}$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - \frac{d\theta}{dt}r\sin\theta \tag{3-3-6c}$$

$$\frac{dz}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + \frac{d\theta}{dt}r\cos\theta \tag{3-3-6d}$$

であるから，式 (3-3-5a, b)，(3-3-6c, d) より

$$\begin{aligned}\frac{dy}{dt} &= R(r,\theta)\cos\theta - \Theta(r,\theta)r\sin\theta \\ &= \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}}R\left[\sqrt{y^2+z^2},\theta\right] - z\Theta\left[\sqrt{y^2+z^2},\theta\right]\end{aligned} \tag{3-3-7a}$$

$$\begin{aligned}\frac{dz}{dt} &= R(r,\theta)\sin\theta + \Theta(r,\theta)r\cos\theta \\ &= \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}}R\left[\sqrt{y^2+z^2},\theta\right] + y\Theta\left[\sqrt{y^2+z^2},\theta\right]\end{aligned} \tag{3-3-7b}$$

を得る．ただし，θ は $\cos\theta = y\Big/\sqrt{y^2+z^2}, \sin\theta = z\Big/\sqrt{y^2+z^2}$ を満たす角である．

(2) 螺旋点 (spirals または spiral points)

臨界点近傍のすべての解 $(y(t), z(t))$ が $t \to \pm\infty$ の極限において螺旋軌道を描きつつ臨界点に収束するとき，その臨界点の型を**螺旋点**と呼ぶ．

例　安定および不安定な螺旋点

連立 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \pm y \pm z \tag{3-3-8a}$$

$$\frac{dz}{dt} = \mp y \pm z \quad （複合同順） \tag{3-3-8b}$$

を極座標 (r,θ) に変換して解くと，解

$$r = Ae^{\pm t} \quad (A：定数) \tag{3-3-9a}$$

$$\theta = \mp t + C \quad (C：定数) \tag{3-3-9b}$$

を得る（演習問題 3-4）．これから媒介変数 t を消去すると位相平面上の軌跡，すなわち，$t \to \pm\infty$ の極限において臨界点 (0, 0) に収束する螺旋

$$r = Ae^{-\theta} \tag{3-3-9c}$$

を得る．このうち，$t \to +\infty$ の極限においてすべての解 $(y(t), z(t))$ が臨界点 (0, 0) に収束する場合（式 (3-3-9a, b) で複合下），臨界点は**安定な螺旋点**（stable spirals）であり（図 3-6a），解を表すすべての点が臨界点 (0, 0) から遠ざかる場合（複合上），**不安定な螺旋点**（unstable spirals）である（図 3-6b）．■

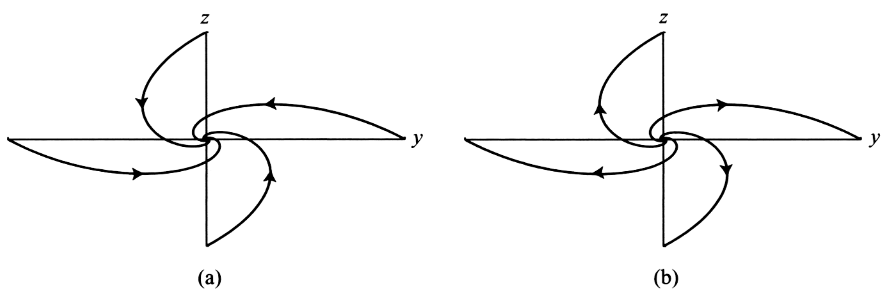


図 3-6　(a) 位相平面上の臨界点：安定な螺旋点近傍の解曲線群 (3-3-9c)
(b) 位相平面上の臨界点：不安定な螺旋点近傍の解曲線群 (3-3-9c)

(3) 鞍点（saddle points）

時間 t の経過とともに，臨界点近傍の一部の解 $(y(t), z(t))$ は臨界点に接近する一方，その他の解 $(y(t), z(t))$ は臨界点から遠ざかるとき，その臨界点の型を**鞍点**と呼ぶ．

例　**y 軸の正負の方向から近づき，z 軸の正負の方向に遠ざかる解曲線群をもつ鞍点**

連立 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -y \tag{3-3-10a}$$

$$\frac{dz}{dt} = z \tag{3-3-10b}$$

の解は

$$y = Ae^{-t} \quad (A：定数) \tag{3-3-11a}$$

$$z = Be^{t} \quad (B：定数) \tag{3-3-11b}$$

である．これから媒介変数 t を消去すると位相平面上の軌跡，すなわち y, z-軸そのもの，およびそれらを漸近線とする直角双曲線

$$yz = C \quad (C：定数) \tag{3-3-12}$$

を得る．y 軸上にある解 $(y(t), 0)$ は y 軸に沿い臨界点 $(0, 0)$ に収束し，z 軸上にある解 $(0, z(t))$ は z 軸に沿い臨界点から遠ざかる．その他の解 $(y(t), z(t))$ は $(\pm\infty, 0)$ からいったん臨界点（0,0）に近づき，$(0, \pm\infty)$ に遠ざかる双曲線の軌跡を描く（図 3-7）．したがって，y 軸上の解を除き解は不安定である．

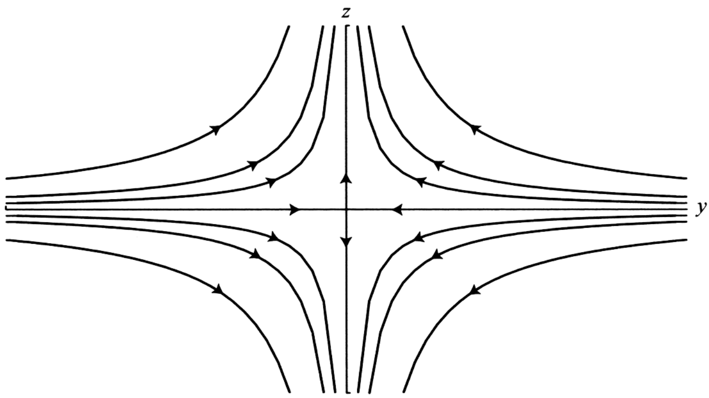


図 3-7　位相平面上の臨界点：鞍点近傍の解曲線群 (3-3-12)

■

(4) 中心 (centers)

臨界点近傍の解 $(y(t), z(t))$ の軌跡がすべて閉軌道を形成するとき，その臨界点の型を**中心**と呼ぶ．

例　**臨界点近傍の解曲線がすべて円である中心**

連立 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -z \tag{3-3-13a}$$

$$\frac{dz}{dt} = y \tag{3-3-13b}$$

の解は

$$y = A\cos(t+\alpha) \quad (A, \alpha：定数) \tag{3-3-14a}$$

$$z = A\sin(t+\alpha) \tag{3-3-14b}$$

である．これから媒介変数 t を消去すると位相平面上の軌跡，すなわち臨界点 $(0, 0)$ を中心とする円（閉軌道）

$$y^2 + z^2 = A^2 \tag{3-3-15}$$

を得る（図 3-8）．したがって，解は安定である．

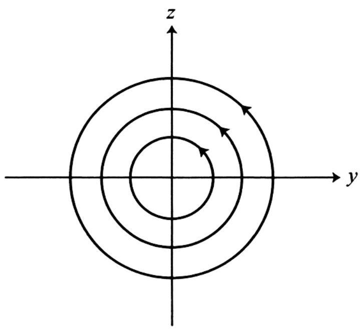


図 3-8　位相平面上の臨界点：中心近傍の解曲線群 (3-3-15)

■

幾何学的形状から分類したこれら四つの臨界点の型のうち，(1) 節と (3) 鞍点は 1 次元位相空間（位相線）においても現れるが（演習問題 3-3），(2) 螺旋点，(4) 中心は 2 次元以上の位相空間に新たに現れる型である．

3-4　線形常微分方程式の位相平面解析

非線形常微分方程式を取り扱うのに先立ち，その基礎として線形常微分方程式の位相平面解析を行う．本節では，2 階線形自律系微分方程式と等価である 1 階連立線形自律系微分方程式の最も一般的な形

$$\frac{dy}{dt} = a_{11}y + a_{12}z \tag{3-4-1a}$$

$$\frac{dz}{dt} = a_{21}y + a_{22}z \tag{3-4-1b}$$

を考察する．前節の例がいずれも線形微分方程式であったため重複するものを採り上げる場合があるが，本節では係数行列の固有値問題という捉え方をする．

さて，連立微分方程式 (3-4-1a, b) の右辺をともに 0 とする y-z 平面（位相平面）上の

点，すなわち臨界点は原点 (0,0) のみである．もちろんこれは線形微分方程式の一般性を失わない[*5]．なお，A が特異行列 $(\det A = 0)$ の場合には固有値 $\lambda = 0$ をもつ．このとき，原点を通りその固有ベクトルを含む直線全体が臨界点の集合となる（演習問題3-10）．

連立微分方程式 (3-4-1a, b) を行列形式

$$\frac{d}{dt}Y = AY \tag{3-4-2a}$$

$$Y \equiv \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad A \equiv \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \tag{3-4-2b}$$

で表す．係数行列 A の二つの固有値（A が実行列ならば二つの実数または共役複素数）を λ_1, λ_2，それぞれに対応する固有ベクトルの一組を Y_1, Y_2 とすると，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ のとき常微分方程式 (3-4-2a, b) の一般解は

$$Y = c_1 Y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 Y_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (c_1, c_2 \text{：定数}) \tag{3-4-3}$$

である（演習問題3-5）．

なお，行列 A の二つの固有値が一致し $(\lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda)$，その独立な固有ベクトルが一つのみ (Y_1) のとき，すなわち対角行列に相似でないときには，連立微分方程式 (3-4-2a, b) の一般解は

$$Y = [c_1 Y_1 + c_2 (Y_3 + Y_1 t)] e^{\lambda t} \quad (c_1, c_2 \text{：定数}) \tag{3-4-4a}$$

の型になる．ただし，Y_3 は

$$Y_1 = (A - \lambda I) Y_3 \quad (I \text{：単位行列}) \tag{3-4-4b}$$

の解の一つである（演習問題3-6および本節(2)項）．

連立微分方程式 (3-4-1a, b) の一般解 (3-4-3)，(3-4-4a) は，係数行列 A の固有値 λ_1, λ_2 を係数とする指数関数の時間依存性をもつので，固有値 λ_1, λ_2 の実数/複素数の別およびそれらの実部の符号により以下のように臨界点 (0, 0) の型を決定することができる．

■ [固有値による臨界点の分類]

(1) 固有値 λ_1, λ_2 がともに正の実数であるとき

解 $(y(t), z(t))$ は時間とともに臨界点から遠ざかる．すなわち，臨界点は**不安定な節**であり，$t \to -\infty$ の極限において，臨界点を通り（二つの）固有ベクトルに一致する直線

[*5] より一般に (3-4-1a, b) の右辺を定数項を含む y, z の1次式とすると，両者をともに0とする y-z 平面（位相平面）上の点すなわち臨界点 (y_c, z_c) が一つ定まる（あるいは臨界点は存在しない）．任意の臨界点 (y_c, z_c) を座標の平行移動により原点に移すことが可能である．

に漸近しつつ，臨界点に収束する．

例　不安定な節

1 階連立線形自律系微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y + 2z \tag{3-4-5a}$$

$$\frac{dz}{dt} = 3z \tag{3-4-5b}$$

の固有値は $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 3$，対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$Y_1 \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad Y_2 \equiv \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-4-6}$$

である．したがって一般解は

$$y = c_1 y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 y_2 \exp(\lambda_2 t) = c_1 e^t + c_2 e^{3t} \tag{3-4-7a}$$

$$z = c_1 z_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 z_2 \exp(\lambda_2 t) = c_2 e^{3t} \quad (c_1, c_2：定数) \tag{3-4-7b}$$

であり，$t \to -\infty$ の極限において $|y| \to 0$, $|z| \to 0$，すなわち，解 $(y(t), z(t))$ は Y_1 および Y_2 方向に沿って臨界点に収束する．媒介変数 t を消去することにより解曲線

$$y = z + C\sqrt[3]{z} \quad (C：定数) \tag{3-4-8}$$

を得る（図 3-9）．

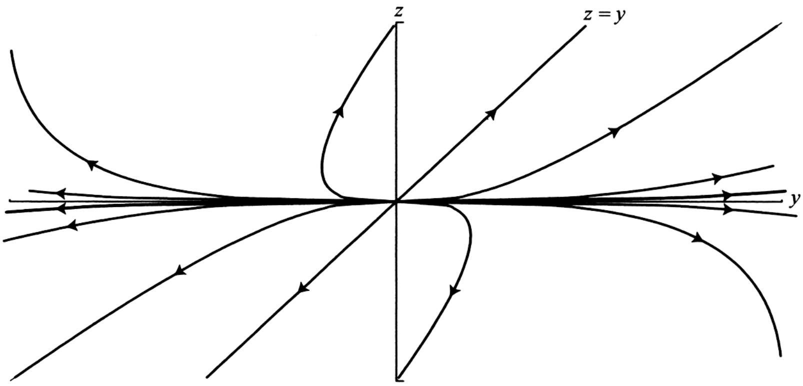


図 3-9　1 階連立微分方程式 (3-4-5a, b：固有値 $\lambda_1 > 0, \lambda_2 > 0$) の臨界点（不安定な節）近傍の解曲線群 (3-4-8)

■

(2)　固有値 λ_1, λ_2 がともに負の実数であるとき

解 $(y(t), z(t))$ は $t \to +\infty$ の極限において（二つの）固有ベクトル方向の直線に漸近し

つつ臨界点に収束する．すなわち，臨界点は**安定な節**である．

例　**負の重根の固有値をもつ安定な節**

1 階連立線形自律系微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -2y \tag{3-4-9a}$$

$$\frac{dz}{dt} = 3y - 2z \tag{3-4-9b}$$

の固有値は重根 $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$，固有ベクトルは

$$Y_1 = \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-4-10}$$

であり，一般解は

$$Y = [c_1 Y_1 + c_2(Y_3 + Y_1 t)]e^{-2t}, \quad Y_3 = \begin{bmatrix} y_3 \\ z_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (c_1, c_2：定数) \tag{3-4-11}$$

である．したがって $t \to +\infty$ の極限において $y \to 0$, $z \to 0$，すなわち解 $(y(t), z(t))$ は臨界点に収束する．媒介変数 t を消去することにより解曲線

$$z = \left(c_1 - \frac{c_2}{2}\log\frac{3y}{c_2}\right)\frac{3y}{c_2} \tag{3-4-12}$$

を得る（図 3-10：固有ベクトルが一つなので Y_1 方向に漸近する $(z/y \to \infty, t \to +\infty)$）．

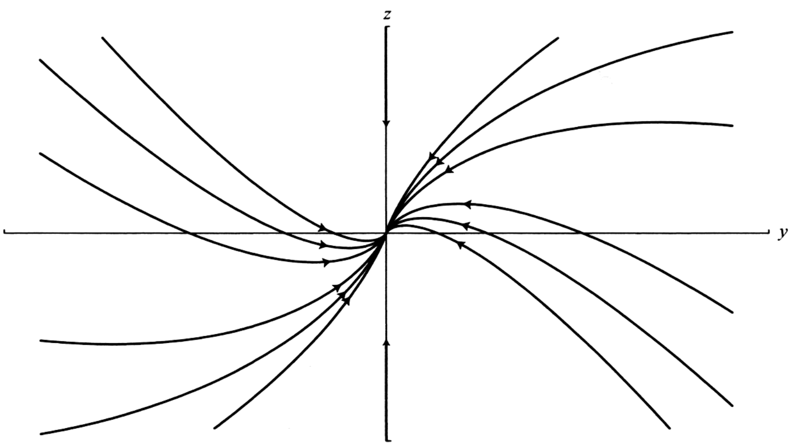


図 3-10　1 階連立微分方程式 (3-4-9a, b：固有値 $\lambda_1 = \lambda_2 < 0$) の臨界点（安定な節）近傍の解曲線群 (3-4-12)

■

(3) 固有値 λ_1, λ_2 がともに実数で $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ であるとき

解 $(y(t), z(t))$ は時間とともに λ_1 の固有ベクトル Y_1 方向では臨界点から遠ざかる一方，λ_2 の固有ベクトル Y_2 方向では臨界点に接近する．すなわち，臨界点は**鞍点**である．

例　鞍　点

1 階連立線形自律系微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = 3y - z \tag{3-4-13a}$$

$$\frac{dz}{dt} = 4y - 2z \tag{3-4-13b}$$

の固有値は $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$，対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$Y_1 \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y_2 \equiv \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix} \tag{3-4-14}$$

である．したがって一般解は

$$y = c_1 y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 y_2 \exp(\lambda_2 t) = c_1 e^{2t} + c_2 e^{-t} \tag{3-4-15a}$$

$$z = c_1 z_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 z_2 \exp(\lambda_2 t) = c_1 e^{2t} + 4c_2 e^{-t} \quad (c_1, c_2：定数) \tag{3-4-15b}$$

であり，時間の経過とともに解 $(y(t), z(t))$ は $Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向では臨界点から遠ざかる一方，$Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \end{bmatrix}$ 方向では臨界点に接近する．媒介変数 t を消去することにより解曲線

$$(4y - z)(y - z)^2 = C \quad (C：定数) \tag{3-4-16}$$

を得る (図 3-11)．　■

実行列 A の固有値 λ_1, λ_2 は複素数になりうるが，それらは共役複素数の対である．

(4) 固有値 λ_1, λ_2 が正の実部をもつ共役複素数であるとき

解 $(y(t), z(t))$ は時間とともに螺旋運動しつつ臨界点から遠ざかる．すなわち，臨界点は**不安定な螺旋点**である．

例　不安定な螺旋点

1 階連立線形自律系微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y - z \tag{3-4-17a}$$

$$\frac{dz}{dt} = y + z \tag{3-4-17b}$$

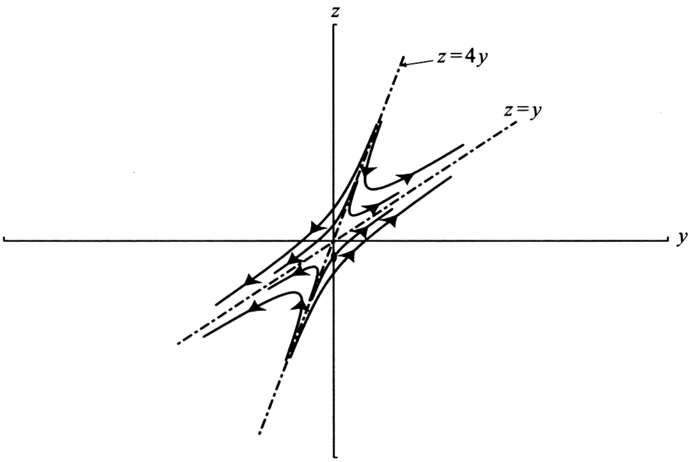


図 3-11　1 階連立微分方程式 (3-4-13a, b：固有値 $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$) の臨界点（鞍点）近傍の解曲線群 (3-4-16)

の固有値は $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_2 = 1 - i$, 対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$Y_1 \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Y_2 \equiv \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -i \\ 1 \end{bmatrix} \tag{3-4-18}$$

である．したがって一般解は

$$y = c_1 y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 y_2 \exp(\lambda_2 t) = ie^t[c_1 \exp(it) - c_2 \exp(-it)] \tag{3-4-19a}$$

$$z = c_1 z_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 z_2 \exp(\lambda_2 t) = e^t[c_1 \exp(it) + c_2 \exp(-it)] \quad (c_1, c_2：定数) \tag{3-4-19b}$$

であり，$t \to +\infty$ の極限において解 $(y(t), z(t))$ は螺旋運動しつつ臨界点から遠ざかる．

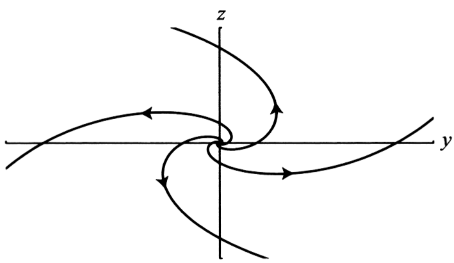


図 3-12　1 階連立微分方程式 (3-4-17a, b：固有値 λ_1, λ_2 は正の実部をもつ共役複素数) の臨界点（不安定な螺旋点）近傍の解曲線群 (3-4-20)

媒介変数 t を消去することにより解曲線

$$r = Ce^{\theta} \quad (C：定数) \tag{3-4-20}$$

を得る（図 3-12）．なお本項では式 (3-4-19) まで，極座標 (式 3-3-4〜7) を用いずに当該臨界点が螺旋点であることを導いた．■

(5) 固有値 λ_1, λ_2 が負の実部をもつ共役複素数であるとき

解 $(y(t), z(t))$ は時間とともに螺旋運動しつつ臨界点に収束する．すなわち，臨界点は**安定な螺旋点**である．

例　**安定な螺旋点**

1 階連立線形自律系微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -y - z \tag{3-4-21a}$$

$$\frac{dz}{dt} = y - z \tag{3-4-21b}$$

の固有値は $\lambda_1 = -1 + i, \lambda_2 = -1 - i$，対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$Y_1 \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -i \end{bmatrix}, \quad Y_2 \equiv \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} \tag{3-4-22}$$

である．したがって一般解は

$$y = c_1 y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 y_2 \exp(\lambda_2 t) = e^{-t}\left[c_1 \exp(it) + c_2 \exp(-it)\right] \tag{3-4-23a}$$

$$z = c_1 z_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 z_2 \exp(\lambda_2 t) = ie^{-t}\left[-c_1 \exp(it) + c_2 \exp(-it)\right] \quad (c_1, c_2：定数) \tag{3-4-23b}$$

であり，$t \to +\infty$ の極限において解 $(y(t), z(t))$ は螺旋運動しつつ臨界点に収束する．媒介変数 t を消去することにより解曲線

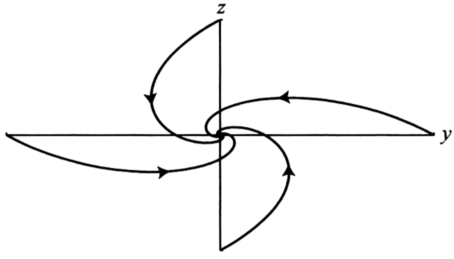


図 3-13　1 階連立微分方程式 (3-4-21a, b：固有値 λ_1, λ_2 は負の実部をもつ共役複素数) の臨界点（安定な螺旋点）近傍の解曲線群 (3-4-24)

$$r = Ce^{-\theta} \quad (C：定数) \tag{3-4-24}$$

を得る.（図 3-13）■

（6） 固有値 λ_1, λ_2 が純虚数であるとき

解曲線は閉軌道となる．すなわち，臨界点は**中心**である.

例　中 心

1 階連立線形自律系微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y - z \tag{3-4-25a}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2y - z \tag{3-4-25b}$$

の固有値は $\lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$，対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$Y_1 \equiv \begin{bmatrix} y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-i \end{bmatrix}, \quad Y_2 \equiv \begin{bmatrix} y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+i \end{bmatrix} \tag{3-4-26}$$

である．したがって一般解は

$$y = c_1 y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 y_2 \exp(\lambda_2 t) = c_1 \exp(it) + c_2 \exp(-it) \tag{3-4-27a}$$

$$z = c_1 z_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 z_2 \exp(\lambda_2 t) = c_1(1-i)\exp(it) + c_2(1+i)\exp(-it)$$

$$(c_1, c_2：定数) \tag{3-4-27b}$$

であり，解曲線は閉軌道（楕円）

$$2y^2 - 2yz + z^2 = C \quad (C：定数) \tag{3-4-28}$$

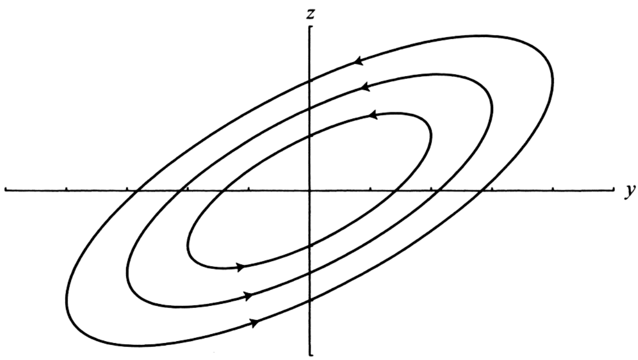


図 3-14　1 階連立微分方程式 (3-4-25a, b：固有値 λ_1, λ_2 は純虚数) の臨界点（中心）近傍の解曲線群（楕円：式 (3-4-28)）

となる(図 3-14). ■

3-5 非線形常微分方程式の位相平面解析 I 臨界点近傍での線形化

本節では，位相平面解析が威力を発揮する非線形常微分方程式を対象とする．非線形常微分方程式ではその厳密解を得ることが困難であるのみならず，線形微分方程式にはない多彩な特徴が現れることを第 2 章までにみてきたが，本章で取り扱う臨界点に関しても線形微分方程式には見られない多様性を見出すことができる．

その第一は臨界点の個数である．連立線形微分方程式 (3-4-1a, b) の臨界点は 1 個(原点)のみであった．3 次元以上の位相空間解析，すなわち 3 階微分方程式・3 元連立 1 階微分方程式の場合にも同様である．ところが，非線形微分方程式では臨界点が複数個出現するのでその解曲線の幾何学的形状がきわめて多彩になる．つまり，連立非線形微分方程式 (3-1-4) で $n=2$ としたもの

$$\frac{d}{dt}y_k = f_k(y_1, y_2) \quad (k = 1, 2) \tag{3-5-1a}$$

の場合には，それらの右辺を 0 とおいた，$(y, z) \equiv (y_1, y_2)$ の 2 元連立非線形代数方程式

$$f_1(y, z) = 0, \quad f_2(y, z) = 0 \tag{3-5-1b}$$

の解・臨界点は複数個存在しうる．

ここで，非線形常微分方程式[*6]を取り扱うための一般的手続きを述べておこう．

(1) 連立方程式 (3-5-1b) を解き，臨界点の個数と位置を決定する．
(2) それぞれの臨界点の**局所解析**を行う．臨界点の近傍においては，非線形常微分方程式の臨界点からの距離に関する線形近似が可能である(例外については次節)．その結果，前節の方法を適用することができ，臨界点の型を決定する．
(3) 複数の臨界点の型を総合し，非線形常微分方程式の解の**大域的性質**を得る．

すなわち，臨界点における局所解析により解の大域的性質までも見通すことができるのである．

以下，臨界点の個数が 1，2，3 個である例を順次みてゆく．

[*6] あらゆる非線形常微分方程式は 1 階上の自律系常微分方程式に変換できる．したがって，本節の 2 次元位相平面解析の対象となる非線形常微分方程式は，2 階自律系常微分方程式と一般の 1 階常微分方程式である．

例 1　**単独臨界点問題　ファン・デル・ポール方程式**

2 階自律系常微分方程式であるファン・デル・ポール方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon\left(\frac{1}{3}\left(\frac{dy}{dt}\right)^2 - 1\right)\frac{dy}{dt} = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{3-2-14 再掲}$$

は，1 階連立微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = z \tag{3-5-2a}$$

$$\frac{dz}{dt} = -y - \varepsilon\left(\frac{1}{3}z^3 - z\right) \tag{3-5-2b}$$

と等価である．連立微分方程式 (3-5-2a, b) の右辺を同時に 0 とする，y-z 位相平面上の点すなわち臨界点は原点 (0, 0) のみである．臨界点近傍では非線形微分方程式 (3-5-2b) を線形近似

$$\frac{dz}{dt} \sim -y + \varepsilon z \qquad y \to 0,\ z \to 0 \tag{3-5-2c}$$

することができる．漸近関係式 (3-5-2c) の漸近関係記号 ~ を等号 = でおきかえた微分方程式，および微分方程式 (3-5-2a) からなる連立線形微分方程式を行列形式で表すと，

$$\begin{bmatrix} \dfrac{dy}{dt} \\ \dfrac{dz}{dt} \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & \varepsilon \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix} \tag{3-5-3}$$

となる．

係数行列 A の固有値は正の実部 $\varepsilon/2$ をもつ共役複素数

$$\lambda_1, \lambda_2 = \frac{\varepsilon \pm \sqrt{\varepsilon^2 - 4}}{2} = \frac{\varepsilon \pm i\sqrt{4 - \varepsilon^2}}{2} \tag{3-5-4}$$

であるゆえ，解 $(y(t), z(t))$ は時間とともに臨界点 (0, 0) から螺旋運動をしつつ遠ざかる．すなわち，臨界点 (0, 0) は**不安定螺旋点**である（図 3-15a：渦の巻き方は反対向きも存在する）．

本例では，y-z 位相平面上の解曲線の形状を特定するために，さらに連立微分方程式 (3-5-2a, b) の y-z 位相平面上の無限遠点付近での振る舞いを調べる．無限遠点付近では微分方程式 (3-5-2b) を

$$\frac{dz}{dt} \sim -y - \frac{\varepsilon}{3}z^3 \qquad y \to \infty,\ z \to \infty \tag{3-5-2d}$$

と近似することができる．微分方程式 (3-5-2a) の両辺に y を乗じ，また漸近関係式 (3-5-2d) の漸近関係記号 ~ を等号 = でおきかえた微分方程式の両辺に z を乗じて両式を加えると，

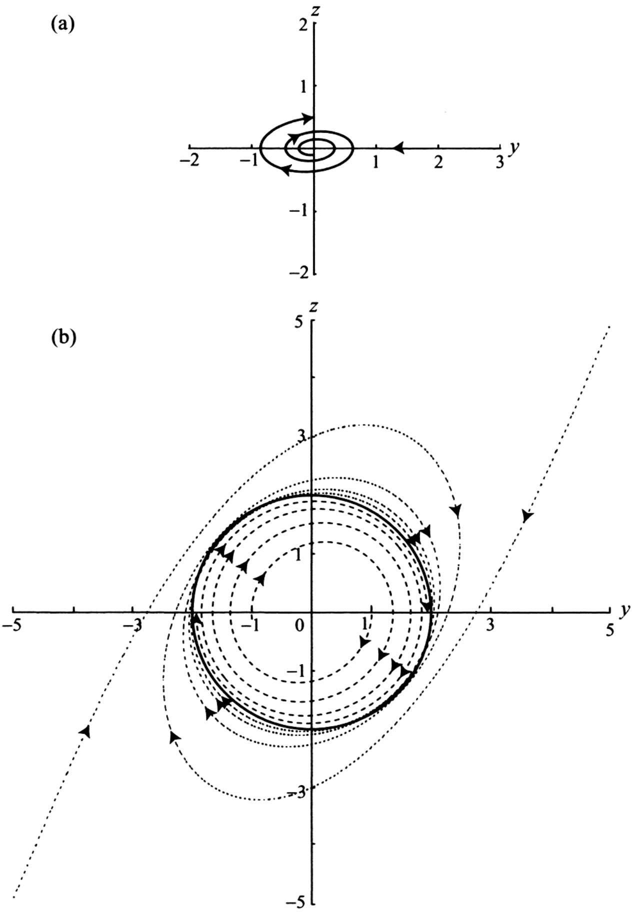


図 3-15　(a) ファン・デル・ポール方程式 (3-2-14) の位相平面上の臨界点（原点：不安定螺旋点）近傍の解曲線の一例

(b) ファン・デル・ポール方程式の位相平面上の極限循環軌道（実線：式 (3-2-17)）に内外側から収束する解曲線群（点線：式 (3-2-15)）

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y^2 + z^2) = -\frac{\varepsilon}{3}z^4 \tag{3-5-5}$$

を得る．式 (3-5-5) の左辺は，解 $(y(t), z(t))$ の原点からの距離の 2 乗の時間変化率であり，右辺はそれが負である，すなわち，無限遠点付近では解 $(y(t), z(t))$ は原点方向に移動することを示している．

一方で原点から遠ざかる解 $(y(t), z(t))$ の軌道が存在し，他方，無限遠点から原点方向に移動する解 $(y(t), z(t))$ の軌道が存在する．しかも，連立微分方程式 (3-5-2a, b) の右

辺は $(y(t), z(t))$ の連続関数であり，解の存在と一意性の定理（5-3 節）を満たすので，これらの軌道は交叉することがない．以上を総合すると，y-z 位相平面上のどこかに軌道の集積（極限循環軌道）が存在しなければならない（図 3-15b）．こうして唯一の臨界点 $(0, 0)$ および無限遠点の局所解析のみから，解の大域的性質である「極限循環軌道の存在」を導き出すことができたのである．

実際，特異摂動法（複スケール解析）により連立微分方程式 (3-5-2a, b) と等価なファン・デル・ポール方程式 (3-2-14) の高精度近似解，

$$y = \frac{2R_0}{\sqrt{\exp(-\varepsilon t) + R_0^2(1 - \exp(-\varepsilon t))}} \cos(t + \theta_0) \quad (R_0, \theta_0 : \text{定数}) \qquad \text{(3-2-15 再掲)}$$

を得ることができ（[5] 6-4 節），解 y が初期条件にかかわらず $\varepsilon t \to +\infty$ の極限において位相平面上における極限循環軌道

$$y = 2\cos(t + \theta_0) \qquad \text{(3-2-16 再掲)}$$

すなわち，

$$y^2 + z^2 = 4 \qquad \text{(3-2-17 再掲)}$$

に漸近することは明らかである．■

例2　双臨界点問題　ヴォルテラ方程式

ヴォルテラ（Volterra）方程式

$$\frac{dy}{dt} = y - yz \qquad \text{(3-5-6a)}$$

$$\frac{dz}{dt} = yz - z \quad (y \geq 0,\ z \geq 0) \qquad \text{(3-5-6b)}$$

は，草食動物（ウサギ）とそれを捕食する肉食動物（キツネ）の頭数の変化の要因（predator-prey relation）をごく単純にモデル化したものである．まず，微分方程式 (3-5-6a) はウサギの頭数 y の時間変化を記述する．すなわち，ウサギの頭数 y は，生殖によりそれ自身 y に比例して増加する一方，キツネによる捕食のために，キツネの頭数 z およびウサギの頭数 y の両者に比例して減少する．一方，微分方程式 (3-5-6b) はキツネの頭数 z の時間変化を記述する．すなわち，キツネの頭数 z はウサギの頭数の減少率（すなわち捕食率）yz に比例して増加する一方，キツネの頭数 z が増加すれば飢餓により減少する（変数変換 $Y = ay$, $Z = bz$ を行い，a, b を適当に選択し，式 (3-5-6a, b) 中の比例定数を 1 とすることができる）．

さて，連立微分方程式 (3-5-6a, b) の両者の右辺をともに 0 とする臨界点は原点 $(0, 0)$ と点 $(1, 1)$ の二つである．臨界点近傍で非線形微分方程式 (3-5-6a, b) を線形近似でき

る．まず，第 1 の臨界点・原点近傍における方程式 (3-5-6a, b) の線形近似は

$$\frac{dy}{dt} = y \tag{3-5-7a}$$

$$\frac{dz}{dt} = -z \tag{3-5-7b}$$

である（以下，いったん漸近関係を得て微分方程式で置き換えるプロセスを省略する）．この連立線形微分方程式の係数行列の固有値は ±1 であるから，第 1 の臨界点・原点は鞍点である．実際，その解は

$$y = Ae^{t} \quad (A：定数) \tag{3-5-8a}$$

$$z = Be^{-t} \quad (B：定数) \tag{3-5-8b}$$

であり，媒介変数 t を消去することにより解曲線（直角双曲線）

$$yz = C \quad (C：定数) \tag{3-5-8c}$$

を得る．解 $(y(t), z(t))$ は時間 t とともに正の z 方向から原点に接近し，正の y 方向に沿い原点から遠ざかる（図 3-16a）．

第 2 の臨界点 $(1, 1)$ 近傍では変数 (y, z) を

$$y = 1 + u, \quad z = 1 + v \tag{3-5-9}$$

と変換し，点 $(1, 1)$ 近傍で微小量である新しい変数 (u, v) について方程式 (3-5-6a,b) を線形近似すると，

$$\frac{du}{dt} = -v \tag{3-5-10a}$$

$$\frac{dv}{dt} = u \tag{3-5-10b}$$

を得る．この連立線形微分方程式の係数行列の固有値は $\pm i$ であるから，第 2 の臨界点 $(1, 1)$ は中心である．実際，その実数解は

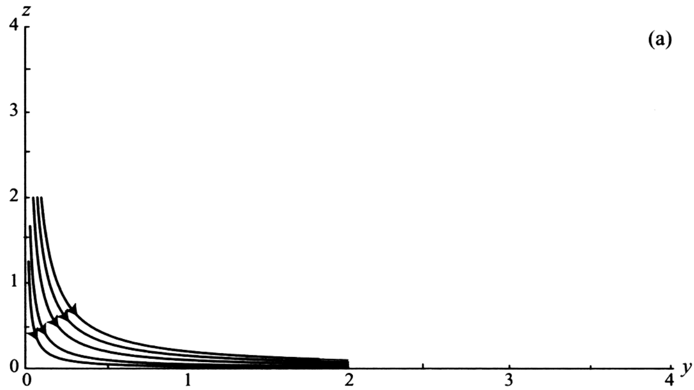
$$u = A\cos(t + \alpha) \tag{3-5-11a}$$

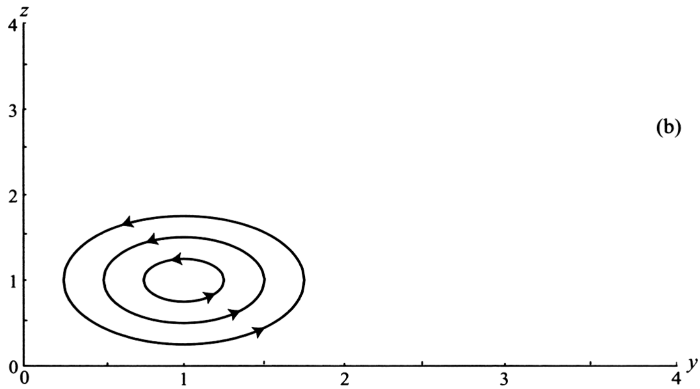
$$v = A\sin(t + \alpha) \quad (A, \alpha：定数) \tag{3-5-11b}$$

であり，媒介変数 t を消去することにより解曲線

$$(y - 1)^2 + (z - 1)^2 = A^2 \tag{3-5-11c}$$

を得る．解 $(y(t), z(t))$ は時間 t とともに中心 $(1, 1)$ のまわりを反時計回りに回転する（図 3-16b）．これは，原点（鞍点）近傍の解曲線の方向（図 3-16a）と矛盾なく接続する．こうして，二つの臨界点の局所解析から，解曲線が第 1 象限内で臨界点 $(1, 1)$ のまわり





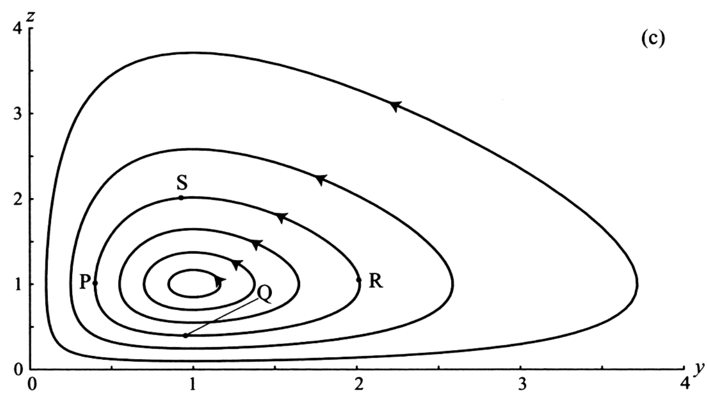


図 3-16　(a) ヴォルテラ方程式 (3-5-6a, b) の位相平面上の臨界点（原点：鞍点）近傍の解曲線群
(b) ヴォルテラ方程式の位相平面上の臨界点（(1, 1)：中心）近傍の解曲線群
(c) ヴォルテラ方程式の位相平面上の解曲線群（数値解）

を反時計回りに周回する，というウサギの頭数 $y\ (\geq 0)$ とキツネの頭数 $z\ (\geq 0)$ の変動をモデル化した連立微分方程式 (3-5-6a, b) の大域的性質を得る．これは数値解（4 次ルンゲ・クッタ法）により確認できる（図 3-16c）．

この解析結果から，ウサギの頭数 y とキツネの頭数 z は周期変動をしており，かつ以下のような特徴をもつことが判明する．すなわち，餌であるウサギの数 y が最小値（P 点，図 3-16c）から増加に転じた後，しばらく捕食者であるキツネの数 z は減少する．そして，ウサギの数が半ば回復するのを待ち（Q 点，図 3-16c），ようやくキツネの数は増加に転じ，ウサギの数が最大値に達し（R 点，図 3-16c）減少に転じた後もしばらく増加し続ける．キツネの数が最大値に達し（S 点，図 3-16c）減少に転じた後はしばらく両者ともに減少し続ける．

なお，解曲線が閉曲線を形成すること自体は以下のとおり解析的に証明することができる．微分方程式 (3-5-6a) に $(1-y)/y$ を，また微分方程式 (3-5-6b) に $(1-z)/z$ を乗じてこれらを加えると，

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt} - \frac{dy}{dt} + \frac{1}{z}\frac{dz}{dt} - \frac{dz}{dt} = 0 \tag{3-5-12}$$

を得，さらに積分することができ，

$$\log yz - (y+z) = C \quad (C：定数) \tag{3-5-13}$$

を得る．解曲線 (3-5-13) は閉曲線である（演習問題 3-7）． ■

例 3 **鼎立臨界点問題**

連立微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -3y + yz \tag{3-5-14a}$$

$$\frac{dz}{dt} = yz + 2z - z^2 \tag{3-5-14b}$$

の両者の右辺をともに 0 とする臨界点は原点 $(0,0)$ および点 $(0,2)$ と $(1,3)$ の三つである．それぞれの臨界点近傍で非線形微分方程式 (3-5-14a, b) を線形近似できる．

まず，第 1 の臨界点・原点近傍における方程式 (3-5-14a, b) の線形近似は

$$\frac{dy}{dt} = -3y \tag{3-5-15a}$$

$$\frac{dz}{dt} = 2z \tag{3-5-15b}$$

である．この連立線形微分方程式の係数行列の固有値は $-3, 2$ であるから，第 1 の臨界点・原点は鞍点である．実際，その解は

$$y = Ae^{-3t} \quad (A：定数) \tag{3-5-16a}$$

$$z = Be^{2t} \quad (B：定数) \tag{3-5-16b}$$

であり，解 $(y(t), z(t))$ は時間 t とともに y 方向から原点に接近し，z 方向に沿い原点から遠ざかる（図 3-17a）．なお，時間 t を独立変数とする解 (3-5-16a, b) から媒介変数 t を消去すると

$$y^2 z^3 = C \quad (C：定数) \tag{3-5-16c}$$

を得る．

第 2 の臨界点 $(0, 2)$ 近傍では変数 z を

$$z = 2 + v \tag{3-5-17}$$

と変換し，点 $(0, 2)$ 近傍で微小量である新しい変数 (y, v) について方程式 (3-5-14a, b) を線形近似すると，

$$\frac{dy}{dt} = -y \tag{3-5-18a}$$

$$\frac{dv}{dt} = 2y - 2v \tag{3-5-18b}$$

を得る．この連立線形微分方程式の係数行列の固有値は $\lambda_1 = -1$，$\lambda_2 = -2$，対応する固有ベクトルは

$$Y_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であるから，第 2 の臨界点 $(0, 2)$ は安定な節である．実際，その解は

$$y = Ae^{-t} \quad (A：定数) \tag{3-5-19a}$$

$$v = 2Ae^{-t} + Be^{-2t} \quad (B：定数) \tag{3-5-19b}$$

であり，時間 t とともに解 $(y(t), z(t))$ は Y_1 および Y_2 方向に漸近しつつ節 $(0, 2)$ に収束する（図 3-17b）．この解曲線の形状および方向は，鞍点（原点）近傍の解曲線の方向（図 3-17a）と矛盾なく接続する．なお，時間 t を独立変数とする解 (3-5-19a, b) から媒介変数 t を消去すると解曲線（放物線）

$$z = 2 + v = 2 + 2y + Cy^2 \quad (C：定数) \tag{3-5-19c}$$

を得る．

第 3 の臨界点 $(1, 3)$ 近傍では変数 (y, z) を

$$y = 1 + u, \quad z = 3 + v \tag{3-5-20}$$

と変換し，点 $(1, 3)$ 近傍で微小量である新しい変数 (u, v) について方程式 (3-5-14a, b)

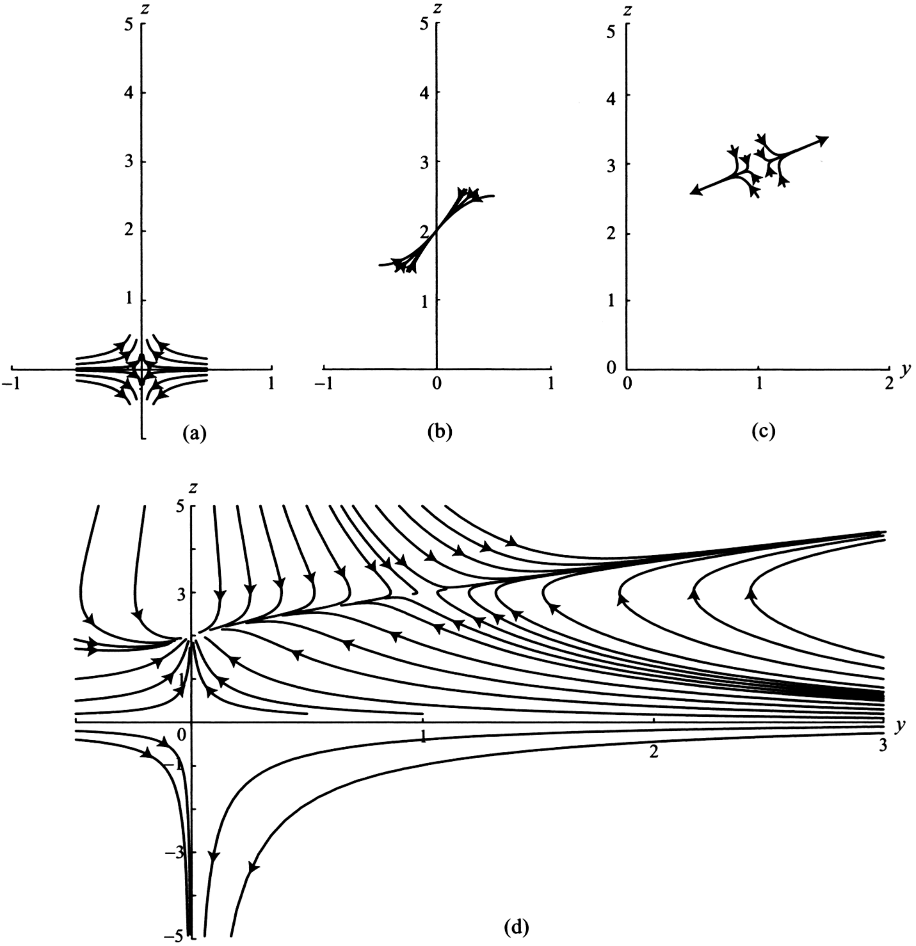


図 3-17 (a) 鼎立臨界点問題 (3-5-14a, b) の位相平面上の臨界点(原点：鞍点) 近傍の解曲線群
(b) 鼎立臨界点問題 (3-5-14a, b) の位相平面上の臨界点((0, 2)：安定な節)近傍の解曲線群
(c) 鼎立臨界点問題 (3-5-14a,b) の位相平面上の臨界点((1, 3)：鞍点)近傍の解曲線群
(d) 鼎立臨界点問題 (3-5-14a, b) の位相平面上の解曲線群(数値解)

を線形近似すると，

$$\frac{du}{dt} = v \tag{3-5-21a}$$

$$\frac{dv}{dt} = 3u - 3v \tag{3-5-21b}$$

を得る．この連立線形微分方程式の係数行列の固有値は

$$\lambda_1 = \frac{-3+\sqrt{21}}{2} > 0 \quad \text{および} \quad \lambda_2 = \frac{-3-\sqrt{21}}{2} < 0 \tag{3-5-22a}$$

であり，対応する固有ベクトルはそれぞれ

$$Y_1 = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-3+\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix}, \quad Y_2 = \begin{bmatrix} u_2 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ \dfrac{-3-\sqrt{21}}{2} \end{bmatrix} \tag{3-5-22b}$$

であるから，第 3 の臨界点 (1, 3) は鞍点である．実際，その解は

$$u = c_1 u_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 u_2 \exp(\lambda_2 t) \tag{3-5-23a}$$

$$v = c_1 v_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 v_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (c_1, c_2 \text{：定数}) \tag{3-5-23b}$$

であり，時間 t とともに解 $(y(t), z(t))$ は Y_2 方向から点 (1,3) に接近し，Y_1 方向に沿い点 (1, 3) から遠ざかる（図 3-17c）．この解曲線の形状および方向は，第 1 の臨界点 (原点）近傍の解曲線の方向（図 3-17a）および第 2 の臨界点 (0, 2) 近傍の解曲線の方向（図 3-17b）と矛盾なく接続する．なお，時間 t を独立変数とする解 (3-5-23a, b) から媒介変数 t を消去すると

$$(v - \lambda_1 u)^{\lambda_1} = C(v - \lambda_2 u)^{\lambda_2} \quad (C \text{：定数}) \tag{3-5-23c}$$

を得る．

これら三つの臨界点付近の解曲線の形状・向きおよび安定性から，読者は y-z 位相平面全体にわたる解曲線の形状および向きを目に浮かべ，概形をスケッチすることができるだろう．すなわち，一つの解曲線群は y 軸の正負の無限遠から原点（鞍点）に接近したのち，安定な節 (0, 2) に収束するものと z 軸の負の方向に遠ざかるものに分かれる．第 2 の解曲線群は y および z の正の無限遠から最終的に Y_2（式 (3-5-22b)）方向に沿い鞍点 (1, 3) に接近したのち，安定な節 (0, 2) に収束するものと Y_1 方向に沿い無限遠に遠ざかるものに分かれる．残る第 3 の解曲線群は y の負の無限遠および z の正の無限遠から安定な節 (0, 2) に収束する．もとの連立微分方程式 (3-5-14a, b) の数値解（4 次ルンゲ・クッタ法）により，以上の局所解析に基づく解の大域的性質の導出が精度よいものであることを示す（図 3-17d）．■

以上の三つの例のように，位相平面解析によればほんの数個の臨界点の局所解析を行うのみで，厳密解を得ることのできない非線形常微分方程式の解曲線群に共通の大域的性質を明らかにすることができる．その性質とはたとえば，例 1 では「すべての解曲線が最終的に極限循環軌道に収束する」ことであり，例 2 では「すべての解曲線が一つの臨界点を反時計まわりに巡る閉曲線を形成する」ことであり，また例 3 では「二つの鞍点への接近と安定な節への収束と無限遠への発散の複合的な組合せ」である．

3-6　非線形常微分方程式の位相平面解析 II　線形近似不可

2 階線形自律系常微分方程式は，それと等価な 2 元連立 1 階線形自律系常微分方程式の係数行列の固有値を調べることにより，その臨界点を「節・鞍点・螺旋点・中心」に分類できる (3-4 節)．続いて非線形自律系常微分方程式についても，臨界点近傍において線形近似することにより線形常微分方程式に関する成果を援用し，同様に臨界点を特定できることを示した (3-5 節)．ところが，この線形近似を適用できない例外が存在する．本節ではその吟味を行う．

3-6-1　線形化できない微分方程式

その第 1 例は，そもそも連立非線形微分方程式 (3-1-7) の線形近似自体が存在しない場合である．たとえば，連立非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = 1 - \cos y + \sin(z^2 + y^2 z^2) \tag{3-6-1a}$$

$$\frac{dz}{dt} = y^3 + z + y^4 z^2 \tag{3-6-1b}$$

の臨界点である原点の近傍における連立微分方程式 (3-6-1a, b) の近似式は

$$\frac{dy}{dt} \sim \frac{y^2}{2} + z^2 \qquad y \to 0,\ z \to 0 \tag{3-6-2a}$$

$$\frac{dz}{dt} \sim y^3 + z \qquad y \to 0,\ z \to 0 \tag{3-6-2b}$$

となるが，あいかわらず非線形であり，線形化による行列の固有値による分類法を適用することができない．

実際，非線形常微分方程式の臨界点は，線形常微分方程式の場合よりはるかに多様性をもち，入射・射出方向がそれぞれ複数個存在する鞍点，あるいは解曲線が直線に漸近せずに臨界点に収束する節などが現れる．これらの臨界点の性質を特定するためには個別の解析を必要とする．以下にいくつかの代表例を紹介する．

例 1　**入射・射出方向がそれぞれ三つ存在する鞍点**

連立 1 階非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = yz(3y^2 - z^2) \tag{3-6-3a}$$

$$\frac{dz}{dt} = z^2(3y^2 - z^2) \tag{3-6-3b}$$

の臨界点は，原点で交叉する三直線 $z = 0$ および $3y^2 - z^2 = 0$ であり孤立臨界点ではない．これら三直線が交叉する原点の臨界点としての性質を調べてみよう．この非線形

微分方程式を臨界点（原点）近傍でこれ以上近似することはできず，対応する連立 1 階線形微分方程式は存在しない（線形近似解析はできない）．そこで，連立 1 階非線形微分方程式 (3-6-3a, b) を式 (3-3-6a, b) により極座標に変換すると，

$$\frac{dr}{dt} = r^4 \sin 3\theta \tag{3-6-4a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 0 \tag{3-6-4b}$$

を得る．したがって，連立 1 階非線形微分方程式 (3-6-4a, b) の臨界点・原点は，入射・射出方向がそれぞれ三つ存在する鞍点である（図 3-18）．■

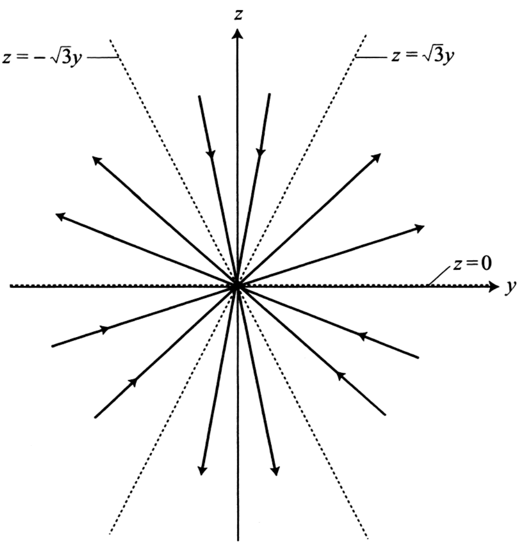


図 3-18　連立 1 階非線形微分方程式 (3-6-3a, b) の位相平面上の臨界点：入射・射出方向がそれぞれ三つ存在する鞍点近傍の解曲線群

例 2　臨界点近傍で解曲線が直線に漸近しない節

連立 1 階非線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = -y - \frac{z}{\sqrt{y^2+z^2}} \sin \frac{2}{\sqrt{y^2+z^2}} \tag{3-6-5a}$$

$$\frac{dz}{dt} = -z + \frac{y}{\sqrt{y^2+z^2}} \sin \frac{2}{\sqrt{y^2+z^2}} \tag{3-6-5b}$$

の臨界点は原点のみである．しかし，この非線形微分方程式を臨界点近傍でこれ以上

近似することはできず，対応する連立 1 階線形微分方程式は存在しない（両式の右辺で第 2 項が主要部であることに注意）．そこで，連立 1 階非線形微分方程式 (3-6-5a, b) を式 (3-3-6a, b) により極座標に変換すると，

$$\frac{dr}{dt} = -r \tag{3-6-6a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r}\sin\frac{2}{r} \tag{3-6-6b}$$

になり，その解

$$r = R_0 e^{-t} \qquad (R_0\text{：定数}) \tag{3-6-7a}$$

$$\theta = \sin^2\frac{e^t}{R_0} + \theta_0 \qquad (\theta_0\text{：定数}) \tag{3-6-7b}$$

を得る．連立 1 階非線形微分方程式 (3-6-6a, b) の臨界点・原点は，安定な節であるが，臨界点近傍で解曲線が直線に漸近せず，入射方向 θ が $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_0 + 1$ の範囲でぶれながら臨界点に収束するという，線形微分方程式の臨界点の節にはない特有の性質を見せる（図 3-19）．■

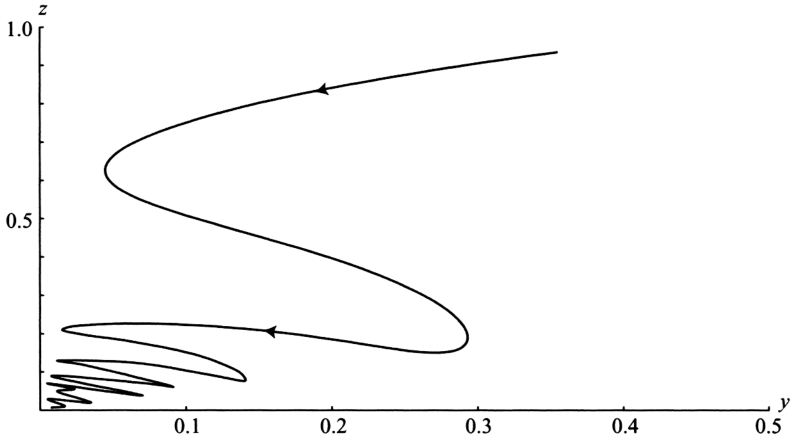


図 3-19　連立 1 階非線形微分方程式 (3-6-5a, b) の位相平面上の臨界点：直線に漸近せず，入射方向がぶれながら安定な節に収束する解曲線の一例（$R_0 = 1, \theta_0 = 0.5$）

■ 3-6-2　中　心

第 2 例は，非線形常微分方程式の臨界点近傍における線形近似が可能であるにもかかわらず，臨界点の線形解析が失敗する場合である．それは，微分方程式を線形化し

た際に無視した微小項が臨界点の定性的性質を左右することがあるからである．

臨界点のうち,「節・鞍点・螺旋点」の場合には，それぞれに微小擾乱を与えてもその定性的性質は変化しない．すなわち，節を形成する解曲線に微小の変更を加えてもその臨界点は節のままである．鞍点・螺旋点の場合も同様である．ところが，臨界点近傍において解曲線が閉曲線を形成する中心の場合には，解曲線に無限小の変更を加えただけで開曲線すなわち螺旋という別種の臨界点に転換しうる．

したがって，非線形常微分方程式の臨界点を線形近似により「中心」と特定した場合（係数行列の二つの固有値が純虚数）には，その臨界点が中心であることを確定するために線形近似解析のみでは不十分であり，近似をしないもとの非線形常微分方程式の臨界点近傍の解曲線が開曲線を形成することを別途証明する必要がある．

■ ［中心と螺旋点］

極座標表示の連立微分方程式

$$\frac{dr}{dt} = r^n \quad (n：自然数) \tag{3-6-8a}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = 1 \tag{3-6-8b}$$

の解曲線

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt[n-1]{r_0^{1-n} - (n-1)t}} \quad (r_0：定数) \tag{3-6-9a}$$

$$\theta(t) = t + \theta_0 \quad (\theta_0：定数) \tag{3-6-9b}$$

が螺旋を形成し，解 $(y(t), z(t))$ が反時計回りに一定の角速度 1 で回転しつつ原点（臨界点）から遠ざかることは明らかである．

そこでまず，$n = 1$ の場合に位相平面解析を行ってみよう．微分方程式 (3-6-8a, b) を変換式 (3-3-6c, d) により直角座標に変換すると線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y - z \tag{3-6-10a}$$

$$\frac{dz}{dt} = y + z \tag{3-6-10b}$$

を得る．係数行列の固有値は $1 \pm i$ であり連立線形微分方程式 (3-6-10a, b) の唯一の臨界点・原点が旋回しつつ遠ざかる解曲線を有する螺旋点であることを確かめることができる．$n = 1$ の場合は連立線形微分方程式が近似を経ていない厳密な方程式であったゆえ正しい結果を得た．

次に，$n = 2$ の場合，微分方程式 (3-6-8a, b) は変換式 (3-3-6c, d) を介して，非線形微

分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y\sqrt{y^2 + z^2} - z \tag{3-6-11a}$$

$$\frac{dz}{dt} = z\sqrt{y^2 + z^2} + y \tag{3-6-11b}$$

と等価である．そこで，この微分方程式の唯一の臨界点・原点の型を調べるために，非線形微分方程式 (3-6-11a, b) を原点の近傍で線形近似

$$\frac{dy}{dt} = -z \tag{3-6-12a}$$

$$\frac{dz}{dt} = y \tag{3-6-12b}$$

すると，連立線形微分方程式 (3-6-12a, b) の係数行列の固有値は $\pm i$ であり，その臨界点（原点）は中心である．すなわち，螺旋の臨界点を有する非線形微分方程式 (3-6-11a, b) を線形近似すると，その微分方程式 (3-6-12a, b) の臨界点は中心に転換する．この事実は，非線形微分方程式 (3-6-11a, b) の右辺の高次の微小量（非線形項）$y\sqrt{y^2 + z^2}$，$z\sqrt{y^2 + z^2}$ が臨界点の型を螺旋点と定める重要な役割を果たしていることを示している．

以上の説明から明らかなように，非線形微分方程式の臨界点が中心であることを確定するためには，対応する線形近似方程式の臨界点が中心であることを示すのみでは不十分であり，もとの非線形微分方程式そのものが閉曲線（閉軌道）の解を有することを示さなければならない．

例　ダフィン方程式

ダフィン方程式

$$\frac{d^2y}{dt^2} + y + \varepsilon y^3 = 0 \qquad \varepsilon \to 0+ \tag{3-2-11 再掲}$$

と等価な連立 1 階微分方程式は

$$\frac{dy}{dt} = z \tag{3-6-13a}$$

$$\frac{dz}{dt} = -y - \varepsilon y^3 \tag{3-6-13b}$$

であり，その臨界点は原点のみである．原点近傍で式 (3-6-13b) の代わりにその線形近似

$$\frac{dz}{dt} = -y \tag{3-6-13c}$$

を用いると，連立線形近似微分方程式 (3-6-13a, c) の係数行列の固有値は $\pm i$ であるゆえ，その臨界点・原点は中心である．しかし，これがただちにもとのダフィン方程式 (3-6-13a, b) の臨界点・原点が中心であることを意味しない．そこで，3-2 節の例 3 の繰

り返しになるが，もとの微分方程式 (3-6-13a) の両辺に y を，また微分方程式 (3-6-13b) の両辺に z を乗じて両式を加えると，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}(y^2+z^2) = -\varepsilon y^3 z = -\frac{\varepsilon}{4}\frac{d}{dt}y^4$$

すなわち，

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(y^2+z^2+\frac{\varepsilon}{2}y^4\right) = 0 \qquad \text{(3-2-12 再掲)}$$

を得る．保存型微分方程式 (3-2-12) の一般解

$$y^2+z^2+\frac{\varepsilon}{2}y^4 = C \quad (C：定数) \qquad \text{(3-2-13 再掲)}$$

は，臨界点・原点を周回する閉曲線を形成する（図 3-3）．これにより，臨界点・原点が中心であることが示すことができる．■

第 3 章の演習問題

3-1　1 階非自律系常微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y + e^{-t}$$

から 2 階自律系常微分方程式を導け．

3-2　$y(t)$ の $n+1$ 階の導関数 $y^{(n+1)}(t)$ は $z(y) \equiv y'(t)$ の n 階以下の導関数で表しうることを示せ．

3-3　**1 次元位相空間（位相線）**　微分方程式 (3-1-4) で $n=1$ とおいた 1 階自律系常微分方程式

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t))$$

の解を表す位相線上の点およびその集合（解曲線）の大域的振る舞い（解の安定性）を調べ，次の二つの型に分類できることを確認せよ．

(1)　節

$t \to \pm\infty$ の極限において，臨界点近傍の解を表すすべての点が臨界点に収束する．

(2)　鞍点

$t \to +\infty$ の極限において，臨界点 (0, 0) 近傍の片側にある解を表す点は臨界点に収束する一方，反対側にある解を表す点は臨界点から遠ざかる．

3-4　連立 1 階線形微分方程式 (3-3-8a, b) の解が (3-3-9a, b) であることを示せ．

3-5　微分方程式

$$\frac{d}{dt}Y = AY \qquad \text{(3-4-2a)}$$

$$Y \equiv \begin{bmatrix} y \\ z \end{bmatrix}, \quad A \equiv \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \qquad \text{(3-4-2b)}$$

の一般解が

$$Y = c_1\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}\exp(t) + c_2\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\exp(5t) \quad (c_1, c_2：定数) \qquad \text{(3-4-3)}$$

であることを示せ.

3-6　行列 A (3-4-2b) の二つの固有値が一致し（$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$），その独立な固有ベクトルが一つ（$Y_1$）のみのときには，連立微分方程式 (3-4-2a, b) の一般解は

$$Y = [c_1 Y_1 + c_2(Y_3 + Y_1 t)]e^{\lambda t} \quad (c_1, c_2 : \text{定数}) \tag{3-4-4a}$$

$$Y_1 = (A - \lambda I)Y_3 \tag{3-4-4b}$$

であることを次の例で示せ.

$$A \equiv \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

3-7　微分方程式 (3-5-12) の解が式 (3-5-13) であること，および，解曲線が閉軌道をなすことを示せ.

3-8　次の連立微分方程式の位相平面上における解曲線の大域的挙動を解析せよ.

$$\frac{dy}{dt} = y(2 - y - z), \quad \frac{dz}{dt} = z(3 - 2y - z)$$

3-9　**線形近似不可**　次の連立微分方程式の位相平面上における解曲線の大域的挙動を解析せよ.

$$\frac{dy}{dt} = -y^3 + z^3, \quad \frac{dz}{dt} = -yz^2$$

3-10　**特異行列**　次の連立微分方程式の臨界点と解曲線を求めよ.

$$\frac{dy}{dt} = y - z, \quad \frac{dz}{dt} = 2y - 2z$$

第4章

特異解

線形常微分方程式の**一般解**は，微分方程式すなわちその現象を支配する法則そのものと等価であり，一般解に含まれる積分定数を初期条件ないし境界条件にもとづき指定することにより，すべての可能な解・**特解**(**特殊解**)を得ることができる．たとえば，重力による自由落下の法則(ガリレオ・ガリレイ)は，微分方程式

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}=\boldsymbol{g} \tag{4-0-1}$$

と表現することができ，その一般解:解曲線(軌跡) $\boldsymbol{r}=(x(t),y(t))$ は，初位置 $\boldsymbol{r}_0\equiv(x_0,y_0)$ を含み二つのベクトル，初速度 $\boldsymbol{v}_0$，重力加速度 $\boldsymbol{g}$ で張られる平面内の放物線

$$y-y_0=(x-x_0)\tan\theta-\frac{(x-x_0)^2g}{2v_0^2\cos^2\theta} \tag{4-0-2}$$

で与えられ，これ以外の解は存在しない．ここに，初位置 $\boldsymbol{r}_0\equiv(x_0,y_0)$ と初速度の絶対値 v_0 および仰角 θ が積分定数である．つまり，野球やサッカーの球のみならず，落ち葉やカミヒコーキをも含むあらゆる物体は，それが自由落下するのであれば，解(4-0-2)に初期条件(初位置，初速度)を代入した放物線軌道を例外なく描くのである．

実際には，落ち葉，カミヒコーキそしてバドミントンのシャトルなど軽量の物体は放物線と明確に異なる軌道を描く．だがそれは一般解が不完全だからではない．それら軽量の物体には単純な自由落下の法則が成り立たず，空気抵抗が重力と同程度の役割を果しているからである．詳しく観察すると，野球の硬球あるいはサッカーボールのような重い物体も放物線とはかなり異なる軌道を描いていることがわかる．もし打撃の瞬間と同じ球速でフライが落下してくるとしたら，外野手が追いかけながらヒョイと出したグローブに球がスポッと収まるはずはない．また，ゴールキックしたサッカーボールがキーパーの蹴った瞬間と同じ速さで落ちて来るとしたら，それを胸でトラップしようとした選手は大ケガをすることだろう．それどころか，雨や雪なかんず

く雹（ヒョウ）が 1000 m 上空の積乱雲から自由落下するとしたら，地表付近では大リーグの最も速い球を投げる投手の 3 倍を超える

$$\sqrt{2gh} = \sqrt{2 \times 9.8\ \ [\mathrm{m/s^2}] \times 1000\ \ [\mathrm{m}]} \fallingdotseq 140\ \ [\mathrm{m/s}] \fallingdotseq 500\ \ [\mathrm{km/h}]$$

という超高速度に達するのだから，天気が崩れるたびに死傷者が続出することになる．もしそうだったとすれば，地上で生き延びる動物はカメのみになるかもしれない．

一方，人工衛星や ICBM（大陸間弾道弾）などは放物線ではなく，楕円軌道（一般に 2 次曲線）を描く．これも一般解 (4-0-2) が不完全だからではなく，「重力が一定である」という微分方程式 (4-0-1) が，地球の曲率が問題になる範囲（地球半径 6400 km と同程度）の運動法則を正確に記述しないからである．周知のように，これを万有引力の法則（ニュートン）

$$\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2} = -GM\frac{\boldsymbol{e}}{|\boldsymbol{r}|^2} \tag{4-0-3}$$

で置き換えれば，その一般解は万有引力のみの作用のもとに運動するあらゆる物体の運動を正確に記述する．ここに G：万有引力定数，M：地球質量，$\boldsymbol{r}$：地球の重心を起点とする位置ベクトル，$\boldsymbol{e}$：$\boldsymbol{r}$ 方向単位ベクトルである．このように，物理法則には一般に適用条件が存在する．それを見きわめるのも漸近関係という考え方である．

話がややわき道に遊んだが，要するに物理法則と微分方程式は等価であり，それが線形微分方程式であるならば，その解はすべて一般解で表現される．つまり，物理法則と一般解は等価である．ところがある種の非線形常微分方程式には，一般解に含まれる積分定数をどのように選んでもその特解として表すことのできない新しいタイプの解，すなわち**特異解**が出現する．「実際問題で遭遇する微分方程式には特異解は存在しない」と即断し切り捨てている専門書もあるが，1-7 節の例が，現実問題に特異解が出現する事情を如実に物語っている．微分方程式の解を追究する者にとり，「一般解を得ただけでは漏れがあるかもしれない，いつ特異解が現れるのかわからない」というのではははなはだ居心地が悪い．そこで，本章では特異解を特異点の説明の延長線上にすえ，その性質を調べ，かつ発生条件を明らかにする．なお，本書では対象を 1 階常微分方程式に限定する．

4-1　特異解の発見

1-7 節で紹介したような平易な例があることを考慮するとむしろ不思議の感をもつが，最初の特異解はテイラー（Brook Taylor）により非線形 1 階常微分方程式

$$\left(1+x^2\right)^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 4y^2(y-1) \tag{4-1-1}$$

において発見されたとされている([6])．ライプニッツによる微分方程式の誕生から40年後の1715年のことである．

変数変換

$$y = u^{-2}(1+x^2) \tag{4-1-2}$$

を施すと微分方程式 (4-1-1) は

$$(1+x^2)\left(\frac{du}{dx}\right)^2 - 2xu\frac{du}{dx} + u^2 - 1 = 0 \tag{4-1-3}$$

となる．微分方程式 (4-1-3) を1階微分すると，

$$\frac{d^2u}{dx^2}\left[(1+x^2)\frac{du}{dx} - xu\right] = 0 \tag{4-1-4}$$

を得る．したがって微分方程式 (4-1-4) を満たすためには

$$\text{A)}\quad \frac{d^2u}{dx^2} = 0 \tag{4-1-5a}$$

すなわち

$$\frac{du}{dx} = c \quad (c：定数) \tag{4-1-5b}$$

または

$$\text{B)}\quad \left(1+x^2\right)\frac{du}{dx} - xu = 0 \tag{4-1-6}$$

でなければならない．

まず，ケース A）を考察する．微分方程式 (4-1-5b) を (4-1-3) に代入すると u の代数方程式

$$c^2\left(1+x^2\right) - 2cxu + u^2 - 1 = 0 \tag{4-1-7}$$

を得，式 (4-1-2) と (4-1-7) から y の**一般解**

$$y = \frac{(1+x^2)}{\left(cx \pm \sqrt{1-c^2}\right)^2} \tag{4-1-8}$$

を得る（図 4-1）．

次に，ケース B）を考察する．微分方程式 (4-1-6) と (4-1-3) を連立すると，

$$\left(1+x^2\right) - u^2 = 0 \tag{4-1-9a}$$

を得，式 (4-1-2) と (4-1-9a) から

$$y = 1 \tag{4-1-9b}$$

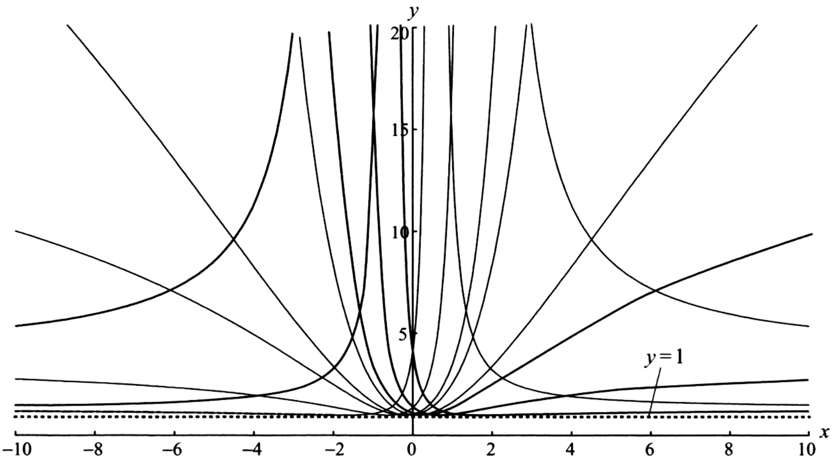


図 4-1　テイラーの特異解（点線）と一般解曲線群（実線）

を得る（図 4-1）．

解 (4-1-9b) は，一般解 (4-1-8) に含まれる積分定数 c をどのように選んでも得ることのできない解，すなわち特異解である．1-7 節の例と本節の例に共通して，特異解は一般解曲線群の**包絡線**を形成している．したがって，特異解曲線上のすべての点は常微分方程式の特異点 II（存在一意性特異点）である．つまり，存在一意性特異点の集合が特異解曲線である．

4-2　特異解発生の伏線

次に，そもそもなぜ一般解に含まれない特異解が出現するのか，その事情を調べよう．そこで，陰関数表示による最も一般的な 1 階常微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{4-2-1}$$

を考察する．慣例により

$$p \equiv \frac{dy}{dx} \tag{4-2-2}$$

とおくと[*1]，微分方程式 (4-2-1) は変数 x, y, p の代数方程式

[*1] 2 変数 (x, y) の関数 $z(x, y)$ に関して，その各偏微分を

$$p = \frac{\partial z(x,y)}{\partial x},\ q = \frac{\partial z(x,y)}{\partial y},\ r = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x^2},\ s = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial x \partial y},\ t = \frac{\partial^2 z(x,y)}{\partial y^2}$$

と表記するのが慣例である．

$$F(x,y,p)=0 \tag{4-2-3}$$

となる．なお，以下では，関数 $F(x,y,p)$ は変数 x,y の 1 価関数，かつ変数 p の多項式に限定する．

いま，(x_0,y_0) を変数 (x,y) の初期値とするとき，変数 p に関する代数方程式

$$F(x_0,y_0,p)=0 \tag{4-2-4}$$

が単根 p_0 をもつならば，代数方程式 (4-2-3) は，(x_0,y_0) の近傍において

$$(x,y)=(x_0,y_0) \quad \text{のとき} \quad p=p_0$$

を満たす唯一の解

$$p=f(x,y) \tag{4-2-5}$$

をもつ．すなわち，関数 $f(x,y)$ は (x_0,y_0) の近傍で 1 価関数である．さらに，関数 $f(x,y)$ が (x_0,y_0) の近傍で連続かつリプシッツ条件 (5-3-2a) を満たすならば，微分方程式

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y) \tag{4-2-6}$$

は初期条件 $(x,y)=(x_0,y_0)$ を満足する唯一の解をもつ．すなわち，特異解発生の余地はない．

ところが，代数方程式 (4-2-4) が重根 p_0 をもつとき，以下に示すように関数 $f(x,y)$ すなわち p は (x_0,y_0) の近傍で正則でなくなり，もはや**解の存在と一意性**は成立しない．ここに特異解が発生する可能性が生ずる．そこで，p_0 が m 重根である

$$\left.\frac{\partial F(x_0,y_0,p)}{\partial p}\right]_{p=p_0}=\left.\frac{\partial^2 F(x_0,y_0,p)}{\partial p^2}\right]_{p=p_0}=\cdots=\left.\frac{\partial^{m-1} F(x_0,y_0,p)}{\partial p^{m-1}}\right]_{p=p_0}=0$$

$$\left.\frac{\partial^m F(x_0,y_0,p)}{\partial p^m}\right]_{p=p_0}\neq 0 \tag{4-2-7}$$

と仮定する．代数方程式 (4-2-3) を $x=x_0$，$y=y_0$，$p=p_0$ のまわりでテイラー級数展開し，その卓越項のみをとると

$$\left\{\left.\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x}\right]_{x=x_0,y=y_0\,p=p_0}+p_0\left.\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y}\right]_{x=x_0,y=y_0\,p=p_0}\right\}\Delta x$$

$$\sim-\frac{(\Delta p)^m}{m!}\left.\frac{\partial^m F(x,y,p)}{\partial p^m}\right]_{x=x_0,y=y_0\,p=p_0} \qquad \Delta x\to 0 \tag{4-2-8}$$

となる．ここに

$$\Delta x=x-x_0, \quad \Delta y=y-y_0, \quad \Delta p=p-p_0 \tag{4-2-9}$$

は各変数の初期値からの変位である．もし

$$\left\{\left.\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x}\right]_{x=x_0,y=y_0\,p=p_0}+p_0\left.\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y}\right]_{x=x_0,y=y_0\,p=p_0}\right\}\neq 0 \tag{4-2-10}$$

ならば，式 (4-2-8) より

$$\Delta p \sim A(\Delta x)^{1/m} \qquad (A：定数) \qquad \Delta x \to 0 \tag{4-2-11a}$$

すなわち，

$$\Delta y \sim p_0\Delta x + B(\Delta x)^{1+1/m} \qquad (B：定数) \qquad \Delta x \to 0 \tag{4-2-11b}$$

を得るので，$x = x_0$ で $y = y_0$ となる解

$$y \sim y_0 + p_0(x - x_0) + B(x - x_0)^{1+1/m} \qquad \Delta x \to 0 \tag{4-2-12}$$

は，(x_0, y_0) の近傍において $(x, y) = (x_0, y_0)$ で互いに一致する m 価関数となる．後に明らかになるように，この解は一般解から得られる特解である．

例　**2 重根**

変数 (x, y) の初期値 (x_0, y_0) において変数 p に関する代数方程式 (4-2-4) が 2 重根をもつ代数方程式 (4-2-3) の最も単純な例

$$F(x, y, p) = x - x_0 + y - y_0 - C(p - p_0)^2 = 0 \tag{4-2-13}$$

を採り上げる．ここに C は定数である．初期値 (x_0, y_0, p_0) 近傍で式 (4-2-8) は

$$(1 + p_0)\Delta x \sim C(\Delta p)^2 \qquad \Delta x \to 0 \tag{4-2-14}$$

となるので，これからただちに

$$\Delta p \sim \pm\sqrt{(1 + p_0)\Delta x/C} \qquad \Delta x \to 0 \tag{4-2-15a}$$

さらに，

$$\Delta y \sim p_0\Delta x \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1 + p_0}{C}}(\Delta x)^{3/2} \qquad \Delta x \to 0 \tag{4-2-15b}$$

を得る．

もとの変数にもどすと，式 (4-2-15b) は

$$y \sim y_0 + p_0(x - x_0) \pm \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1 + p_0}{C}}(x - x_0)^{3/2} \qquad \Delta x \to 0 \tag{4-2-15c}$$

となる．これは，変数 (x, y) の初期値 (x_0, y_0) 近傍において，初期値 (x_0, y_0, p_0) を共有する二つの解が存在することを意味する（図 4-2）．この例が示すように，式 (4-2-12) 型の存在一意性特異点 (x_0, y_0) は**尖点**（cusps）である．■

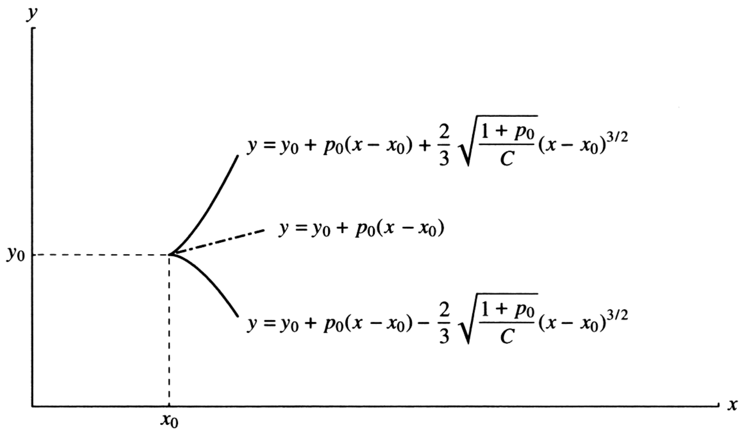


図 4-2　尖点付近の 2 つの解曲線（実線）

4-3　*p*-判別式

前節で明らかになったように，変数 x, y, p の代数方程式

$$F(x, y, p) = 0 \qquad \text{(4-2-3 再掲)}$$

が p の重根をもつとき，すなわち，

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 0 \qquad \text{(4-3-1)}$$

であるときのみ，解の一意性が破れ，特異解発生の可能性が生まれる．このとき，式 (4-2-3) と (4-3-1) から変数 p を消去して得られる式

$$\Delta_p F(x, y, p) = 0 \qquad \text{(4-3-2)}$$

を満たす変数の対 (x, y) は，代数方程式 (4-2-3) に対応する微分方程式 (4-2-1) の存在一意性特異点である．その軌跡すなわち式 (4-3-2) を微分方程式 (4-2-1) の ***p*-判別式曲線**（*p*-discriminant locus），また式 (4-3-2) の左辺を ***p*-判別式**（*p*-discriminant）と呼ぶ．

いま，式 (4-3-2) を満たす一つの特異点 (x_0, y_0) およびそれに対応する p_0 のまわりに代数方程式 (4-2-3) を展開する

$$F(x, y, p) = C_0 + C_1(p - p_0) + C_2(p - p_0)^2 + \cdots + C_n(p - p_0)^n + o(p - p_0)^n = 0 \qquad p \to p_0 \qquad \text{(4-3-3)}$$

と，代数方程式 (4-3-3) は特異点 (x_0, y_0) において変数 $p = p_0$ の重根をもつので，特異点 (x_0, y_0) 近傍における係数の (x, y) 依存性は

$$C_0 = a_0(x - x_0) + b_0(y - y_0) + o(x - x_0) + o(y - y_0) \qquad x \to x_0, y \to y_0 \tag{4-3-4}$$

$$C_1 = a_1(x - x_0) + b_1(y - y_0) + o(x - x_0) + o(y - y_0) \qquad x \to x_0, y \to y_0 \tag{4-3-5}$$

となる．代数方程式 (4-3-3) とそれを変数 p により偏微分した式

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = C_1 + 2C_2(p - p_0) + \cdots + nC_n(p - p_0)^{n-1} + o(p - p_0)^{n-1} = 0 \qquad p \to p_0 \tag{4-3-6}$$

から変数 p を消去して p-判別式曲線を求めることができる．

■ [尖点の集合]

以上の結果を，前節の例

$$F(x, y, p) = x - x_0 + y - y_0 - C(p - p_0)^2 = 0 \tag{4-2-13 再掲}$$

にあてはめると，

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = -2C(p - p_0) \tag{4-3-7}$$

であるから，p-判別式曲線は直線

$$x - x_0 + y - y_0 = 0 \tag{4-3-8}$$

となる（図 4-3）．すなわち，この例では p-判別式曲線は異なる解曲線の尖点（存在一意性特異点）を連ねた尖点曲線（cusp locus：この場合直線）になっている．その勾配がたまたま解曲線に一致するという特別な場合を除き，この p-判別式曲線自体は微分方

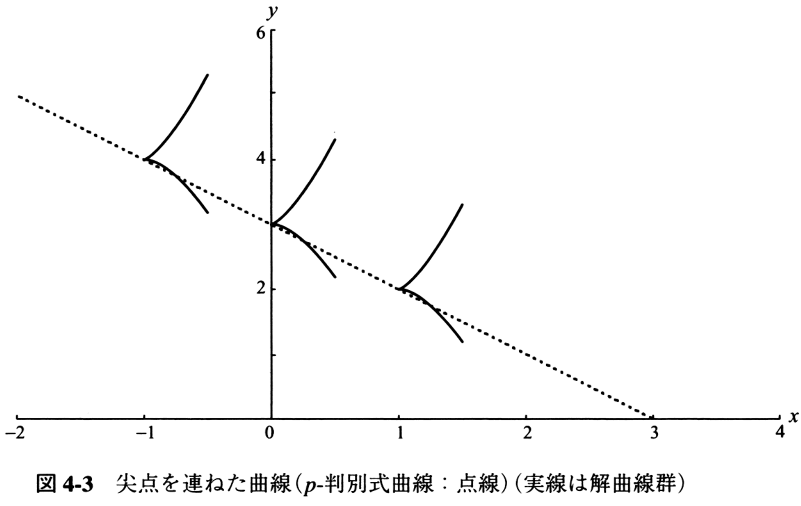


図 4-3 尖点を連ねた曲線（p-判別式曲線：点線）（実線は解曲線群）
$(x_0 = 1, y_0 = 2, p_0 = 0.5)$

程式 (4-2-1) の解ではない．

■ ［接曲線 (tac locus)］

微分方程式

$$F(x, y, p) = 4p^2 x - (3x-1)^2 = 0 \tag{4-3-9}$$

を考察する．これを変数 p で偏微分した式

$$\frac{\partial F(x, y, p)}{\partial p} = 8px = 0 \tag{4-3-10}$$

に，式 (4-3-9) を変数 p について解いたもの

$$p^2 = \frac{(3x-1)^2}{4x}$$

を代入すると，p-判別式曲線

$$x(3x-1)^2 = 0 \tag{4-3-11}$$

を得る．すなわち，p-判別式曲線は 2 本の直線

$$x = \frac{1}{3} \quad (p = 0) \tag{4-3-11a}$$

および[*2]

$$x = 0 \quad \left(\frac{1}{p} = 0\right) \tag{4-3-11b}$$

から成る．式 (4-3-11a) において変数 p の値は p-判別式曲線 $x = 1/3$ の勾配ではなく解曲線の勾配であることに注意されたい．また，微分方程式 (4-3-9) の一般解は

$$(y-c)^2 = x(x-1)^2 \quad (c：定数) \tag{4-3-12}$$

である (図 4-4)．

二つの p-判別式曲線のうち，前者 $x = 1/3$ (4-3-11a) は，積分定数 c の連続しない (とびとびの) 値に対応する二つの解曲線が接する存在一意性特異点 (接：○) の集合 (接曲線) である．

■ ［包絡線 1］

引き続き前例 (式 4-3-9) を調べる (図 4-4)．そこで得られた p-判別式曲線のうち後者 $x = 0$ (4-3-11b) は，積分定数 c を連続的に変化させることにより生成される解曲線群に接する包絡線である．包絡線上のすべての点は存在一意性特異点であり，かつそのすべての点で一般解の勾配に一致するので，それ自身微分方程式の解である．つま

[*2] x を y の関数とみなすと，$x = 0$ が p-判別式曲線であることを理解しやすい．

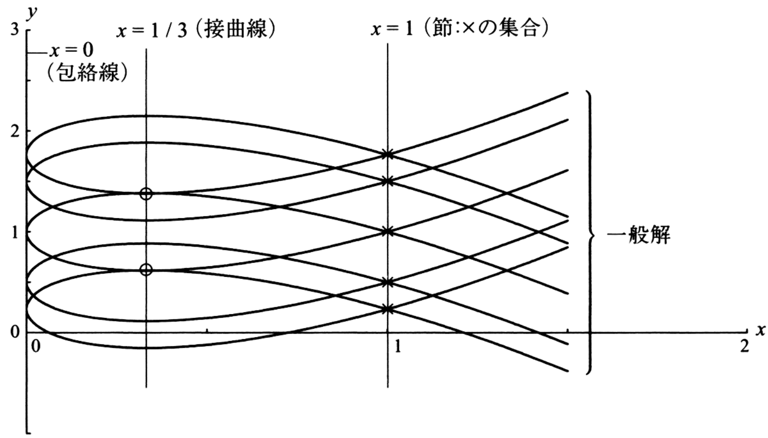


図 4-4　微分方程式 (4-3-9) の一般解曲線群 (4-3-12) および接曲線 (4-3-11a), 包絡線 (4-3-11b), 節の集合 (4-4-10b)

り, 積分定数 c をパラメータとする一般解の解曲線群に包絡線が存在するとき, それは p-判別式曲線であり, かつ存在一意性特異点を連ねた, もう一つの解曲線となる. この新しい解曲線が**特異解**である.

■ [包絡線 2]

p-判別式曲線が包絡線となるもう一つの例

$$F(x, y, p) = y^2 + p^2 - 1 = 0 \tag{4-3-13}$$

を調べてみよう. 微分方程式 (4-3-13) の一般解は

$$y = \sin(x + c) \quad (c : \text{定数}) \tag{4-3-14}$$

である (図 4-5). その p-判別式曲線

$$y = \pm 1 \tag{4-3-15}$$

は, 連続する一般解の解曲線群の包絡線であり, かつ特異解である.

■ [特異解の定義]

以上の考察にもとづき特異解を次のように定義する.

関数

$$y = f(x) \tag{4-3-16}$$

が微分方程式

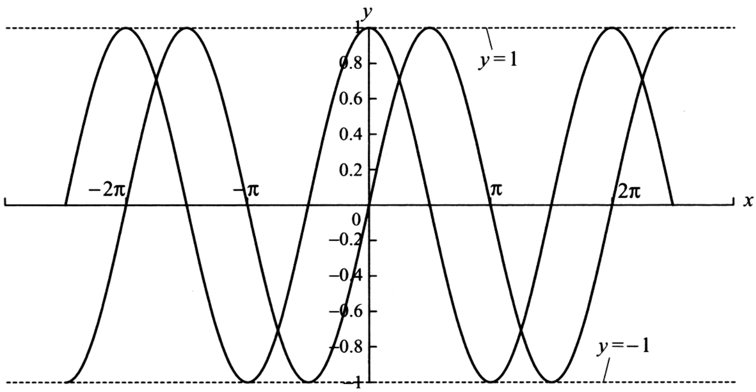


図 4-5　微分方程式 (4-3-13) の一般解曲線群（式 (4-3-14)：実線）と特異解（式 (4-3-15)：包絡線：点線）

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \tag{4-3-17}$$

の解であるとする．もし，その解曲線上のすべての点 (x_0, y_0) において初期条件 $y_0 = f(x_0)$ を満足する第 2 の解が存在するとき，すなわち，その解曲線上のすべての点 (x_0, y_0) が常微分方程式の特異点 II（存在一意性特異点）であるとき，解 (4-3-16) を特異解と呼ぶ．

したがって，まず，特異解は p-判別式曲線でなければならない．そしてもし p-判別式曲線が一般解曲線群の包絡線であれば特異解である．しかし，特異解はこの包絡線型に限らない．p-判別式曲線が尖点曲線ないし接曲線である場合，尖点ないし接において p-判別式曲線と共有点をもつ一般解曲線の勾配が p-判別式曲線の勾配に一致するときにも，その p-判別式曲線は特異解である（4-5 節，例 3）．

4-4　c-判別式

次に微分方程式の解曲線群の包絡線を考察する．微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0 \tag{4-2-1 再掲}$$

が積分可能であるとき，その一般解を

$$G(x, y, c) = 0 \tag{4-4-1}$$

と表す．ここに c は積分定数である．もし，この c をパラメータとする解曲線群に包絡線が存在するならば，以下に示すように，その包絡線は式 (4-4-1) および

$$\frac{\partial G(x, y, c)}{\partial c} = 0 \tag{4-4-2}$$

からパラメータ c を消去して得られる式

$$\Delta_c G(x, y, c) = 0 \tag{4-4-3}$$

すなわち，**c-判別式曲線**（c-discriminant locus）である．また，式 (4-4-3) の左辺を **c-判別式**（c-discriminant）と呼ぶ．なお，後述するように，c-判別式曲線は必ずしも解曲線群の包絡線とは限らない．

さて，解曲線上では

$$\frac{\partial G(x, y, c)}{\partial x} dx + \frac{\partial G(x, y, c)}{\partial y} dy = 0 \tag{4-4-4}$$

が満たされるので，解曲線と c-判別式曲線の交点 (x_0, y_0) における解曲線の接線の勾配は

$$-\frac{\partial G(x, y, c)}{\partial x} \Bigg/ \frac{\partial G(x, y, c)}{\partial y}\Bigg]_{x=x_0, y=y_0} \tag{4-4-5}$$

である．

一方，式 (4-4-1,2) を連立して得られる c-判別式曲線 (4-4-3) を，定数 c をパラメータとして，

$$x = h(c), \quad y = k(c) \tag{4-4-6}$$

と表すと，c-判別式曲線上では式 (4-4-2) より，

$$\frac{\partial G(x, y, c)}{\partial x}\frac{dh(c)}{dc} + \frac{\partial G(x, y, c)}{\partial y}\frac{dk(c)}{dc} = 0 \tag{4-4-7}$$

が満たされる．また式 (4-4-6) より，c-判別式曲線の接線の勾配は

$$\frac{dk(c)}{dc} \Bigg/ \frac{dh(c)}{dc} \tag{4-4-8}$$

である．したがって式 (4-4-5, 7, 8) より，交点 (x_0, y_0) における c-判別式曲線の接線の勾配は，

$$\frac{\partial G(x, y, c)}{\partial x}\Bigg]_{x=x_0, y=y_0} = \frac{\partial G(x, y, c)}{\partial y}\Bigg]_{x=x_0, y=y_0} = 0 \tag{4-4-9}$$

でない限り，解曲線の接線の勾配に等しい．したがって，c-判別式曲線は解曲線の包絡線であるか，あるいは式 (4-4-9) を満たす存在一意性特異点の集合（一般に，尖点曲線または節の集合）である．

例 **微分方程式 (4-3-9) 再訪**

接曲線が現れる例として先に採り上げた微分方程式

$$F(x, y, p) = 4p^2 x - (3x - 1)^2 = 0 \qquad \text{(4-3-9 再掲)}$$

にもどろう．その一般解は

$$G(x, y, c) = x(x-1)^2 - (y-c)^2 = 0 \quad (c：定数) \tag{4-3-12 再掲}$$

である（図4-4）．ゆえに，その c-判別式曲線は

$$x(x-1)^2 = 0 \tag{4-4-10}$$

すなわち，

$$x = 0 \tag{4-4-10a}$$

および

$$x = 1 \tag{4-4-10b}$$

である．このうち，c-判別式曲線 $x = 0$ (4-4-10a) は p-判別式曲線 (4-3-11b) と共通であり，すべての一般解曲線に接する包絡線である（図4-4）．もう一つの c-判別式曲線 $x = 1$ (4-4-10b) は解曲線の存在一意性特異点・**節**（×）の集合である（図4-4）．■

4-5　特異解をもつ非線形常微分方程式

本節では，特異解をもつ非線形常微分方程式の具体例を採り上げ，それぞれの一般解，p-判別式曲線，c-判別式曲線および特異解の式とグラフを示す．

例1　特異解を有する微分方程式 (1)（図4-6）

微分方程式

$$4y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - \left(\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 x - 4y\right)^2 = 0 \tag{4-5-1a}$$

の一般解は

$$y = c\left(x - \frac{1}{c}\right)^2 \quad (c：定数) \tag{4-5-1b}$$

である．その p-判別式曲線は

$$y = 0, \quad y = -4x \tag{4-5-1c}$$

c-判別式曲線は

$$y = 0, \quad y = -4x \tag{4-5-1d}$$

であり，

$$y = 0, \quad y = -4x \tag{4-5-1e}$$

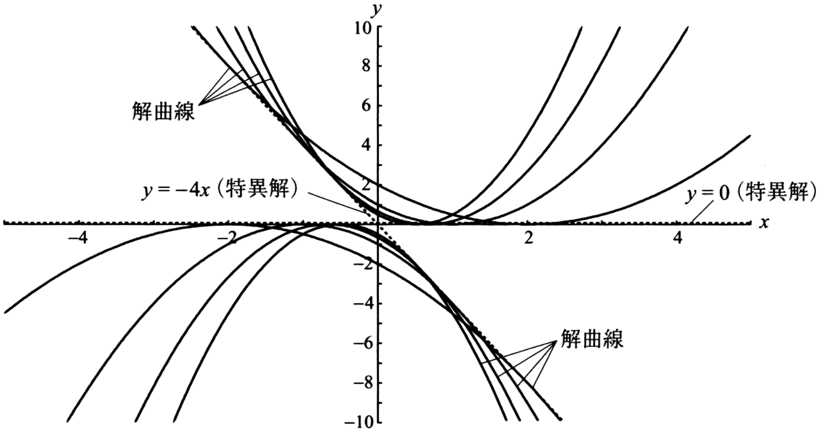


図 4-6 微分方程式 (4-5-1a) の解曲線群 (実線：4-5-1b)，p-判別式曲線 (4-5-1c)，c-判別式曲線 (4-5-1d) および特異解 (4-5-1e)

が特異解である. ■

例 2 **特異解を有する微分方程式 (2)**（**図 4-7**）

微分方程式

$$3y^3 - xy^2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{27}\left(\frac{dy}{dx}\right)^4 = 0 \tag{4-5-2a}$$

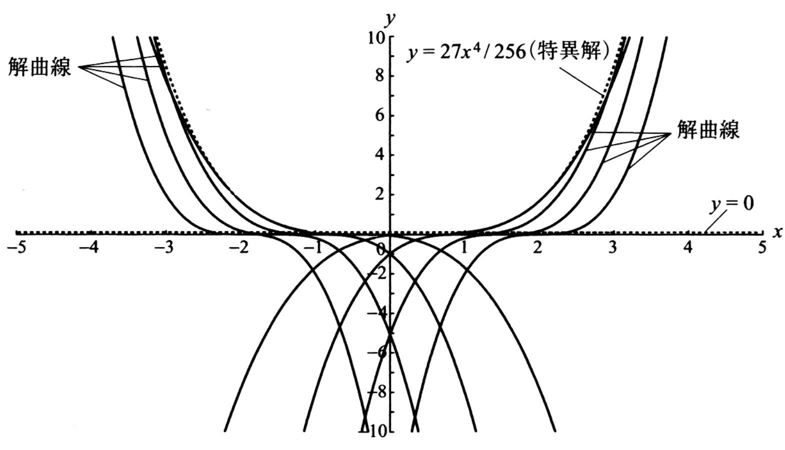


図 4-7 微分方程式 (4-5-2a) の解曲線群 (実線：4-5-2b)，p-判別式曲線 (4-5-2c)，c-判別式曲線 (4-5-2d) および特異解 (4-5-2e)

の一般解は

$$y = c(x-c)^3 \quad (c：定数) \tag{4-5-2b}$$

である．その p-判別式曲線は

$$y = 0, \quad y = \frac{27x^4}{256} \tag{4-5-2c}$$

c-判別式曲線は

$$y = 0, \quad y = \frac{27x^4}{256} \tag{4-5-2d}$$

であり，

$$y = \frac{27x^4}{256} \tag{4-5-2e}$$

が特異解である．なお，$y = 0$ は一般解で $c = 0$ としたものである．■

例 3　**特異解を有する微分方程式 (3)（図 4-8）**

微分方程式

$$2y - 3x\frac{dy}{dx} + 27x\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \tag{4-5-3a}$$

の一般解は

$$(2y+c)^3 - cx^2 = 0 \quad (c：定数) \tag{4-5-3b}$$

である．その p-判別式曲線は，

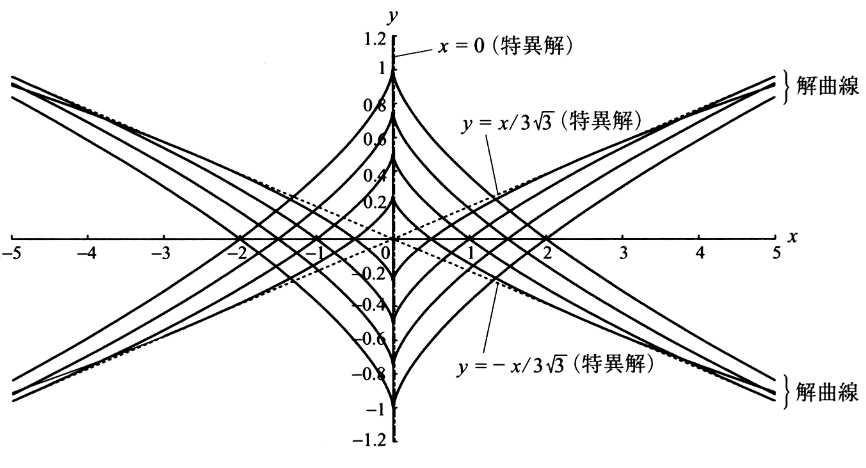


図 4-8　微分方程式 (4-5-3a) の解曲線群 (実線：4-5-3b)，p-判別式曲線 (4-5-3c)，c-判別式曲線 (4-5-3d) および特異解 (4-5-3e)

$$y = \pm\frac{x}{3\sqrt{3}}, \qquad x = 0 \tag{4-5-3c}$$

c-判別式曲線は

$$y = \pm\frac{x}{3\sqrt{3}}, \qquad x = 0 \tag{4-5-3d}$$

であり，

$$y = \pm\frac{x}{3\sqrt{3}}, \qquad x = 0 \tag{4-5-3e}$$

が特異解である．なお，$x = 0$ は尖点曲線である．■

例 4　特異解を有する微分方程式 (4)（図 4-9）

微分方程式

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{4}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \tag{4-5-4a}$$

の一般解は

$$y = cx - \frac{c^2}{4} \quad （c：定数） \tag{4-5-4b}$$

である．その p-判別式曲線は

$$y = x^2 \tag{4-5-4c}$$

c-判別式曲線は

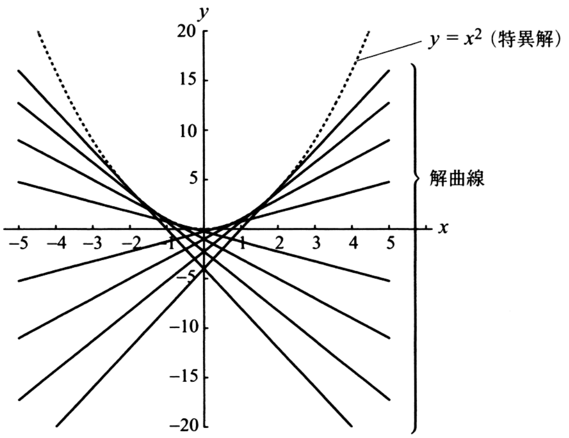


図 4-9　微分方程式 (4-5-4a) の解曲線群 (実線：4-5-4b)，p-判別式曲線 (4-5-4c)，c-判別式曲線 (4-5-4d) および特異解 (4-5-4e)

$$y = x^2 \tag{4-5-4d}$$

であり,

$$y = x^2 \tag{4-5-4e}$$

が特異解である. ■

例 5　特異解を有する微分方程式 (5)（図 4-10）

微分方程式

$$8y^2 - 4xy\frac{dy}{dx} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 = 0 \tag{4-5-5a}$$

の一般解は

$$y = c(x-c)^2 \quad (c：定数) \tag{4-5-5b}$$

である. その p-判別式曲線は

$$y = 0, \quad y = \frac{4x^3}{27} \tag{4-5-5c}$$

c-判別式曲線は

$$y = 0, \quad y = \frac{4x^3}{27} \tag{4-5-5d}$$

であり,

$$y = \frac{4x^3}{27} \tag{4-5-5e}$$

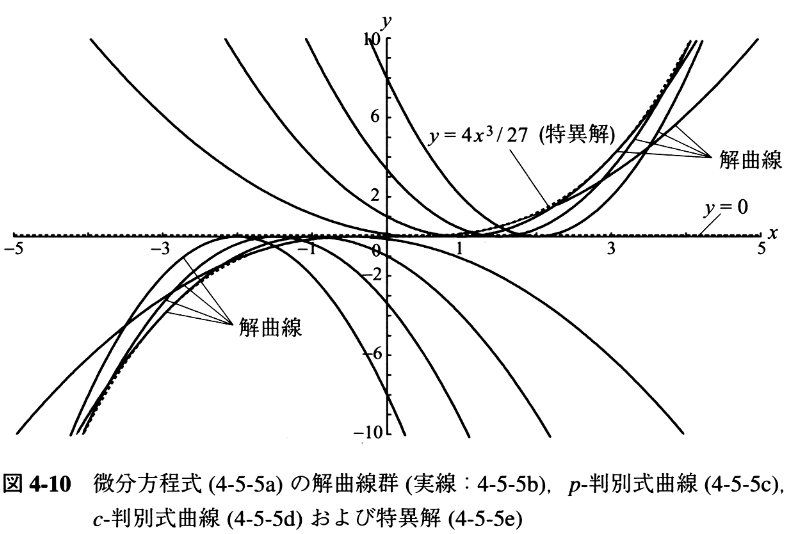


図 4-10　微分方程式 (4-5-5a) の解曲線群 (実線：4-5-5b), p-判別式曲線 (4-5-5c), c-判別式曲線 (4-5-5d) および特異解 (4-5-5e)

が特異解である．なお，$y=0$ は一般解で $c=0$ とおいたものである． ■

例 6 **特異解を有する微分方程式 (6)（図 4-11）**

微分方程式

$$3xy - 2x^2\frac{dy}{dx} + 2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = 0 \tag{4-5-6a}$$

の一般解は

$$(3y+2c)^2 - 4cx^3 = 0 \quad （c：定数） \tag{4-5-6b}$$

である．その p-判別式曲線は

$$x = 0, \quad y = \frac{x^3}{6} \tag{4-5-6c}$$

c-判別式曲線は

$$x = 0, \quad y = \frac{x^3}{6} \tag{4-5-6d}$$

であり，

$$y = \frac{x^3}{6} \tag{4-5-6e}$$

が特異解である．なお，$x=0$ は尖点曲線である．

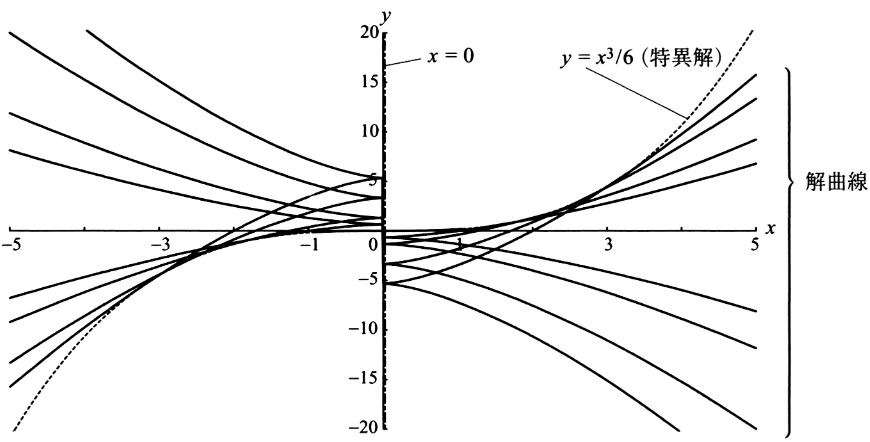


図 4-11　微分方程式 (4-5-6a) の解曲線群 (実線：4-5-6b)，p-判別式曲線 (4-5-6c)，c-判別式曲線 (4-5-6d) および特異解 (4-5-6e)

■

4-6　特異解の存在条件

前節まで展開した特異解に関する考察にもとづき，特異解が出現する条件（存在条件）を明らかにしよう．まず，存在一意性特異点の集合である特異解は p-判別式曲線の分枝（branch）である．そこで，p-判別式曲線の接線の勾配を求めるために式 (4-2-3) を x で微分すると，

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}\frac{dp}{dx}=0 \tag{4-6-1}$$

を得るが，p-判別式曲線上では

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0$$

であるから，式 (4-6-1) は

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y}\frac{dy}{dx}=0 \tag{4-6-2}$$

と単純化できる．この p-判別式曲線が解曲線（特異解）であるためには，

$$p=\frac{dy}{dx}$$

でなければならないので，式 (4-6-2) より

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x}+p\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y}=0 \tag{4-6-3}$$

が成立しなければならない．

したがって，この p-判別式曲線が特異解であるための，すなわち特異解が存在するための**必要条件**は，連続する点 (x,y) の集合に関して，p-判別式曲線の条件

$$F(x,y,p)=0 \tag{4-2-3 再掲}$$

および，

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \tag{4-3-1 再掲}$$

に加えて，式 (4-6-3) が成立することである．

例 1　**クレローの微分方程式・再訪**

1-7 節で紹介したクレローの微分方程式中の導関数 dy/dx を記号 p で置き換えると，代数方程式

$$F(x,y,p)=yp-xp^2+1=0 \tag{1-7-13a}$$

となり，その左辺の変数 p による偏微分を 0 とおくと

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p} = y - 2xp = 0 \tag{4-6-4}$$

を得る．式 (1-7-13a) および (4-6-4) から変数 p を消去すると，p-判別式曲線，すなわち特異解

$$y = \pm 2\sqrt{-x} \tag{1-7-18 再掲}$$

を得る．確かに式 (1-7-13a) は条件式 (4-6-3) を満たしている．

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x} + p\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y} = -p^2 + p^2 = 0$$

■

例 2　2 重根・再々訪

変数 (x, y) の初期値 (x_0, y_0) において，変数 p に関する代数方程式 (4-2-4) が 2 重根をもつ例

$$F(x,y,p) = x - x_0 + y - y_0 - C(p - p_0)^2 = 0 \tag{4-2-13 再掲}$$

をみたび採り上げよう．その変数 p による偏微分を 0 とおくと

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p} = -2C(p - p_0) = 0 \tag{4-6-5}$$

となるので，両者から変数 p を消去して，p-判別式曲線

$$x - x_0 + y - y_0 = 0 \tag{4-3-8 再掲}$$

を得るが，この p-判別式曲線は特別な場合 $(1 + p_0 = 0)$ を除き，式 (4-6-3) を満たさない．

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x} + p\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y} = 1 + p_0 \neq 0 \tag{4-6-6}$$

つまり，先に見たようにこの p-判別式曲線は尖点の集合であり，特異解ではない．■

次に，特異解が存在するための十分条件を一つ見出そう．いま，パラメータ q をもつ次の三つの式

$$F(x,y,q) = 0 \tag{4-6-7}$$

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial q} = 0 \tag{4-6-8}$$

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial x} + q\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial y} = 0 \tag{4-6-9}$$

で定まる曲線 C を考える．曲線 C の接線の勾配を求めるために式 (4-6-7) を x で微分すると，

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial x}+\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial q}\frac{dq}{dx}=0 \tag{4-6-10}$$

を得るが，式 (4-6-8) により式 (4-6-10) は

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial x}+\frac{dy}{dx}\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial y}=0 \tag{4-6-11}$$

と単純化できる．式 (4-6-9,11) より

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial y}\left(\frac{dy}{dx}-q\right)=0 \tag{4-6-12}$$

を得る．それゆえ，曲線 C 上のすべての点で

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial y}\neq 0 \tag{4-6-13}$$

が満足されるならばパラメータ q は曲線 C の接線の勾配 dy/dx に一致するので，曲線 C は微分方程式 (4-2-3) の解曲線，すなわち特異解である．

したがって，特異解が存在するための必要条件である

$$F(x,y,p)=0 \tag{4-2-3 再掲}$$

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial p}=0 \tag{4-3-1 再掲}$$

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x}+p\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y}=0 \tag{4-6-3 再掲}$$

に式 (4-6-13) を加えたものが，この曲線 C が特異解であるための，すなわち特異解が存在するための**十分条件**である．

例 1 におけるクレローの微分方程式 (1-7-13a) の p-判別式曲線 (1-7-18) は，式 (4-6-13) を満たす特異解である．

例 3　微分方程式 (4-3-9)・再々訪

みたび，微分方程式

$$F(x,y,p)=4p^2x-(3x-1)^2=0 \tag{4-3-9 再掲}$$

を考察する．p-判別式曲線（2 本の y 軸に平行な直線）

$$x(3x-1)^2=0 \tag{4-3-11 再掲}$$

のうち，

$$x=\frac{1}{3}\quad (p=0) \tag{4-3-11a 再掲}$$

は，特異解であるための必要条件のうち，p-判別式曲線の条件 (4-2-3, 4-3-1) はもちろん，

$$\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial x} + p\frac{\partial F(x,y,p)}{\partial y} = 4p^2 - 6(3x-1) = 0 \qquad \text{(4-6-3 再掲)}$$

も満たしているが，十分条件 (4-6-13) を満足しない

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial y} = 0$$

実際，この p-判別式曲線は特異解ではなく接曲線であった（図 4-4）．

また，p-判別式曲線のうちもう一方の

$$x = 0 \quad \left(\frac{1}{p} = 0\right) \qquad \text{(4-3-11b 再掲)}$$

は条件式 (4-6-13) を満足しないが

$$\frac{\partial F(x,y,q)}{\partial y} = 0$$

特異解である．つまり，先の十分条件 (4-2-3,4-3-1,4-6-3,4-6-13) は，特異解が存在するための必要十分条件ではない．■

第 4 章の演習問題

4-1 それぞれの非線形常微分方程式（一般解を示す）の p-判別式曲線，c-判別式曲線および特異解を求めよ．

（A）　微分方程式 $4x - 2y\dfrac{dy}{dx} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

一般解 $y = cx^2 + \dfrac{1}{c}$　（c：定数）

（B）　微分方程式 $4(1-y) - (2-3y)^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

一般解 $y^2 - y^3 = (x-c)^2$　（c：定数）

（C）　微分方程式 $8\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 x - y\left(12\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 - 9\right) = 0$

一般解 $3cy^2 = (x+c)^3$　（c：定数）

4-2 4-3 節の解析を 1-7 節の例（微分方程式 (1-7-10)）にあてはめよ．

第 5 章

前章までの詳細補足と関連公式

本書の構成は，第 1 章で全体の概要を述べ，その各論を第 2 章から第 4 章で展開する形をとっている．その記述の中で，やや細部にわたるため話の腰を折るおそれなきにしもあらずと判断されるが，本書が自己完結するためにどうしても削ることのできない内容，および本書の記述に関連する諸公式と特殊関数に関する資料を本章に収録する．

5-1　非線形常微分方程式の厳密解

非線形常微分方程式の厳密解を得る数少ない体系的方法について整理しておく．なお，線形常微分方程式の厳密解については前著（[5]）の付録 B. を参照されたい．

5-1-1　1 階 1 次非線形常微分方程式

A. 変数分離法

変数分離法（separation of variables）は非線形常微分方程式の最も基本的解法である．非線形常微分方程式

$$P(y)\frac{dy}{dx} = Q(x) \tag{5-1-1}$$

の解は

$$\int^{y} P(t)\,dt = \int^{x} Q(t)\,dt + C \quad (C：定数) \tag{5-1-2}$$

であり，さらに一般的な非線形常微分方程式

$$P_1(y)Q_1(x)\frac{dy}{dx} = P_2(y)Q_2(x) \tag{5-1-3}$$

の解は

$$\int^y \frac{P_1(t)}{P_2(t)}\,dt = \int^x \frac{Q_2(t)}{Q_1(t)}\,dt + C \quad (C：定数) \tag{5-1-4}$$

である．ただし，$P_2(y)Q_1(x) = 0$ を満たす有意の解が抜け落ちる可能性を吟味する必要がある．

例

1 階 1 次非線形常微分方程式

$$2xy\frac{dy}{dx} = (x+1)(y^2-1) \tag{5-1-5}$$

は，変数分離形

$$\frac{x+1}{x}dx = \frac{2y}{y^2-1}\,dy \tag{5-1-6}$$

であるから，一般解

$$x + \log|x| = \log|y^2-1| + C \quad すなわち \quad y = \pm\sqrt{1 \pm x\exp(x-C)} \quad (C：定数) \tag{5-1-7}$$

を得る．なお，式 (5-1-6) に移る際，両辺を除した因数 = 0 に対応する

$$x = 0 \quad および \quad y = \pm 1 \tag{5-1-8}$$

も，もとの微分方程式 (5-1-5) の解である．そのうち，$y = \pm 1$ は一般解 (5-1-7) で $C \to +\infty$ としたものであるが，解 $x = 0$ は一般解に含まれない． ■

B. 同次式（ライプニッツ）

非線形常微分方程式

$$P(x,y)\frac{dy}{dx} = Q(x,y) \tag{5-1-9}$$

において，$P(x,y), Q(x,y)$ がいずれも x と y の n 次同次式であるとき，すなわち

$$P(x,y) = x^n P(1,v), \quad Q(x,y) = x^n Q(1,v) \tag{5-1-10}$$

$$v = \frac{y}{x} \tag{5-1-11}$$

であるとき，y から v への変数変換 (5-1-11) により，式 (5-1-9) は

$$xP(1,v)\,dv = [Q(1,v) - vP(1,v)]\,dx \tag{5-1-12}$$

すなわち，変数分離形

$$\frac{P(1,v)}{Q(1,v) - vP(1,v)}\,dv = \frac{dx}{x} \tag{5-1-13}$$

に変換できる．

例

非線形常微分方程式

$$(x^2 - xy)\frac{dy}{dx} = (y^2 + xy) \tag{5-1-14}$$

は，変数変換 (5-1-11) により

$$x(1-v)\,dv = \left[(v^2+v) - v(1-v)\right] dx$$

すなわち，変数分離形

$$\frac{1-v}{2v^2}dv = \frac{dx}{x} \tag{5-1-15}$$

に変換される．その解は

$$-\frac{1}{2}\left(\log|v| + \frac{1}{v}\right) = \log|x| + C \quad (C：定数)$$

すなわち

$$\log|xy| + \frac{x}{y} = C \tag{5-1-16}$$

である．■

C. ベルヌイ方程式 (Bernoulli equations)

1695 年，ベルヌイ (James Bernoulli) は非線形常微分方程式 (ベルヌイ方程式)

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y(x) + b(x)y(x)^n \quad (n \neq 1：定数) \tag{5-1-17}$$

を，変数変換

$$z(x) = y(x)^{1-n} \tag{5-1-18}$$

により，線形常微分方程式

$$\frac{dz}{dx} = (1-n)\left[a(x)z(x) + b(x)\right] \tag{5-1-19}$$

に変換し，その解

$$y(x)^{1-n} = Ce^{F(x)} + (1-n)e^{F(x)}\int^x e^{-F(t)}b(t)\,dt, \quad F(x) \equiv (1-n)\int^x a(t)\,dt \quad (C：定数) \tag{5-1-20}$$

を得た．

D. リカッティ方程式 (Riccati equations)

1712 年，リカッティは非線形常微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y(x)^2 + b(x)y(x) + c(x) \tag{5-1-21}$$

を従属変数の変換

$$y(x) = -\frac{1}{a(x)z(x)}\frac{dz}{dx} \tag{5-1-22}$$

により，2 階線形微分方程式

$$\frac{d^2z}{dx^2} - \left[\frac{a'(x)}{a(x)} + b(x)\right]\frac{dz}{dx} + a(x)c(x)z(x) = 0 \tag{5-1-23}$$

に変換できることを示した．線形微分方程式 (5-1-23) は非線形微分方程式 (5-1-21) より取り扱いやすい例が多い．

また，リカッティ方程式 (5-1-21) の特解 $y_1(x)$ が一つ発見できれば，変換

$$y(x) = y_1(x) + z(x) \tag{5-1-24}$$

により，ベルヌイ方程式 ($n = 2$)

$$\frac{dz}{dx} = [2a(x)y_1(x) + b(x)]\, z(x) + a(x)z(x)^2 \tag{5-1-25}$$

を得る．

E. 完全微分型非線形常微分方程式

完全微分型方程式（exact equations）

$$P(x,y) + Q(x,y)\frac{dy}{dx} = 0, \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \tag{5-1-26}$$

の解は

$$f(x,y) = C, \quad P(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial x}, \quad Q(x,y) = \frac{\partial f(x,y)}{\partial y} \quad (C：\text{定数}) \tag{5-1-27}$$

である．

■ 5-1-2　1 階高次非線形常微分方程式

次に，1 階高次非線形常微分方程式

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) \equiv \left[\frac{dy}{dx}\right]^n + q_{n-1}(x,y)\left[\frac{dy}{dx}\right]^{n-1} + \cdots + q_2(x,y)\left[\frac{dy}{dx}\right]^2 + q_1(x,y)\frac{dy}{dx} + q_0(x,y) = 0 \tag{5-1-28}$$

を考察する．ここに $q_k(x,y)$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ は (x,y) の任意関数である．

A. 基礎論

1 階高次非線形常微分方程式 (5-1-28) は dy/dx の n 次式であるから（原理的に）因数分解可能である．

$$\left[\frac{dy}{dx}-r_1(x,y)\right]\left[\frac{dy}{dx}-r_2(x,y)\right]\cdots\left[\frac{dy}{dx}-r_n(x,y)\right]=0 \tag{5-1-29}$$

したがって，各因数

$$\frac{dy}{dx}-r_k(x,y)=0 \tag{5-1-30}$$

の一般解を

$$f_k(x,y,C)=0 \quad (C：定数) \tag{5-1-31}$$

とすると，微分方程式 (5-1-29) の一般解は

$$f_1(x,y,C)f_2(x,y,C)\cdots f_n(x,y,C)=0 \tag{5-1-32}$$

である．

例

1 階高次非線形常微分方程式

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2-2\frac{dy}{dx}+1-y^2=0 \tag{5-1-33}$$

を因数分解することにより

$$\left(\frac{dy}{dx}+y-1\right)\left(\frac{dy}{dx}-y-1\right)=0 \tag{5-1-34}$$

解

$$(Ce^{-x}-y+1)(Ce^{x}-y-1)=0 \quad (C：定数) \tag{5-1-35}$$

を得る． ■

B. 同次式

1 階高次非線形常微分方程式 (5-1-28) が (x,y) の k 次同次式であるとき，すなわち微分方程式が

$$F(x,y,p)\equiv x^kG\left(\frac{y}{x},p\right)=0 \tag{5-1-36}$$

の型であるとき，原理的に

$$p=f\left(\frac{y}{x}\right) \tag{5-1-37}$$

と解くことができ，式 (5-1-28) は (5-1-9, 10) に帰着する．

C. 2 変数 (x,y) それぞれに関して線形である場合

x,y それぞれに関して線形である 1 階高次非線形常微分方程式

$$y = f\left(\frac{dy}{dx}\right)x + g\left(\frac{dy}{dx}\right) \tag{5-1-38}$$

を x で微分すると，

$$p = f(p) + [xf'(p) + g'(p)]\,\frac{dp}{dx} \tag{5-1-39}$$

となるが，ここで p を独立変数，x を従属変数とみると，線形微分方程式

$$\frac{dx}{dp} - \frac{f'(p)}{p - f(p)}x - \frac{g'(p)}{p - f(p)} = 0 \tag{5-1-40}$$

を得る．

例　**クレローの微分方程式**

クレローの微分方程式

$$y = x\frac{dy}{dx} - \frac{1}{dy/dx} \qquad \text{(1-7-13 再掲)}$$

を x で微分すると，

$$\left(x + \frac{1}{p^2}\right)\frac{dp}{dx} = 0 \qquad \text{(1-7-14 再掲)}$$

を得る．　■

■ 5-1-3　高階非線形常微分方程式

A. 基礎論

高階線形常微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f(x) \tag{5-1-41}$$

の一般解は

$$y = \int_{x_0}^{x} dx_1 \int_{x_0}^{x_1} dx_2 \cdots \int_{x_0}^{x_{n-1}} f(x_n)dx_n + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{(x-x_0)^k}{k!}$$

$$(C_0, C_1, \ldots, C_{n-1}：定数) \tag{5-1-42}$$

あるいは，

$$y = \frac{1}{(n-1)!}\int_{x_0}^{x} (x-t)^{n-1} f(t)dt + \sum_{k=0}^{n-1} C_k \frac{(x-x_0)^k}{k!} \tag{5-1-43}$$

と表すことができる．

B. 従属変数 y（およびその k 階未満の導関数）を陽に含まない場合

高階非線形常微分方程式

$$F(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 \quad (k \geq 1) \tag{5-1-44}$$

は

$$u \equiv y^{(k)} \tag{5-1-45}$$

とおくことにより，$n-k$ 階微分方程式

$$F(x, u, u', \ldots, u^{(n-k)}) = 0 \quad (k \geq 1) \tag{5-1-46}$$

に変換される．残る作業は，

$$y^{(k)} = u$$

を解く問題に帰着する (5-1-3 項の A.)．

C. 独立変数 x を陽に含まない場合 (自律系)

高階非線形常微分方程式

$$F(y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = 0 \tag{5-1-47}$$

は，y を独立変数，$p \equiv dy/dx$ をその従属変数とみなすと，y の x による n 階導関数までは

$$y' = p, \quad y'' = p\frac{d}{dy}p, \quad y^{(3)} = p\frac{d}{dy}\left(p\frac{d}{dy}p\right), \cdots,$$

$$y^{(n)} = \overbrace{p\frac{d}{dy}\left(p\frac{d}{dy}\left(\cdots p\frac{d}{dy}p\right)\right)\Bigg)\Bigg)}^{n-1\text{ 階}} \tag{5-1-48}$$

と，p の y による $n-1$ 階導関数までで表すことができる．ゆえに，n 階微分方程式 (5-1-47) は $n-1$ 階微分方程式

$$G\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}, \cdots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0 \tag{5-1-49}$$

に変換される．

D. $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ について同次式

高階非線形常微分方程式が $y, y', y'', \ldots, y^{(n)}$ について k 次同次式

$$F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n)}) = y^k G\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \cdots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = 0 \tag{5-1-50}$$

であるとき，

$$y = \exp\left[\int_0^x u(t)dt\right] \tag{5-1-51}$$

により y を u に変数変換すると，

$$y' = u(x)\exp\left[\int_0^x u(t)dt\right] = u(x)y$$

$$y'' = \left[u(x)^2 + u'(x)\right]\exp\left[\int_0^x u(t)dt\right] = \left[u(x)^2 + u'(x)\right]y \tag{5-1-52}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$y^{(n)} = \left[u(x), u'(x), \ldots, u^{(n-1)}(x) \text{ の多項式}\right]y$$

と表すことができるので，もとの微分方程式 (5-1-50) は $n-1$ 階微分方程式

$$G\left(x, \frac{y'}{y}, \frac{y''}{y}, \cdots, \frac{y^{(n)}}{y}\right) = H(x, u, u', \ldots, u^{(n-1)}) = 0 \tag{5-1-53}$$

に変換される．

5-2 ベキ級数の収束半径

複素平面上の領域 D 内で正則な関数 $f(z)$ は，領域 D 内の任意の点（通常点）z_1 のまわりにテイラー級数展開でき，

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z - z_1)^n \tag{5-2-1}$$

これが $f(z)$ の点 z_1 まわりの唯一のベキ級数である．ベキ級数 (5-2-1) は，点 z_1 を中心とし領域 D 内に含まれる円内で絶対収束し，領域 D 内の任意の閉領域内で一様収束する．それゆえ，領域 D の境界上の点のうち点 z_1 から最も近い点までの距離を R とすると，ベキ級数 (5-2-1) は $|z - z_1| < R$ を満たすすべての点 に対して絶対収束し，逆に $|z - z_1| > R$ を満たすすべての点 z に対して発散する．この R を**収束半径**と呼ぶ．したがって，複素平面上で点 z_1 から最も近い特異点までの距離が収束半径である．以下で，通常の級数の収束判定法に基づいた，ベキ級数の収束半径を求める方法をまとめておく．

級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ が収束するための必要十分条件（コーシーの収束条件）は，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，$n > N$ のすべての n および任意の自然数 m について，

$$\left|\sum_{k=n}^{n+m} a_n\right| < \varepsilon \tag{5-2-2}$$

を満たす自然数 N を定めることができることである（[18]）．この条件式を満足するか否かを直接判定することは通常困難であるため，実用上便利な収束判定法を用いる．

その第 1 は**比試験** (ratio test) である．

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ に関して，ある自然数 N より大きいすべての n について，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < s < 1 \tag{5-2-3}$$

が成立するならば，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束する．特に，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < s < 1 \tag{5-2-4}$$

ならば，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束する．これから，ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_1)^k$ の収束半径

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{5-2-5}$$

を得る．

その第 2 は**根試験** (root test，またはコーシー試験) である．

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ に関して，ある自然数 N より大きいすべての n について，

$$\sqrt[n]{|a_n|} < s < 1 \tag{5-2-6}$$

が成立するならば，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束する．特に，

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < s < 1 \tag{5-2-7}$$

ならば，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束する．これから，ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_1)^k$ の収束半径

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|} \tag{5-2-8}$$

を得る．

5-3　解の存在と一意性 (リプシッツ条件)

本書を含む微分方程式論の文献に頻繁に引用されるリプシッツ (Lipschitz) 条件を解説する．リプシッツ条件は常微分方程式の解が存在し，それが一意的であるための十分条件である[*1]．

実数変数の 1 階常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = F(x,y), \quad y(x_0) = y_0 \tag{5-3-1}$$

は，点 (x_0, y_0) を含む長方形閉領域 D

[*1] したがって，存在一意性特異点を含む領域において，リプシッツ条件は満たされない．

$$x_0 - a \le x \le x_0 + a, \quad y_0 - b \le y \le y_0 + b \qquad (a > 0, b > 0:\text{定数})$$

内で関数 $F(x,y)$ が 1 価（連続）であり[*2]かつ，リプシッツ条件

$$|F(x,y_1) - F(x,y_2)| < K|y_1 - y_2| \quad (K:\text{定数},\ \ \forall(x,y_1),(x,y_2) \in D) \tag{5-3-2a}$$

$$\left(F(x,y)\text{ が微分可能であれば，}\left|\frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right| < K \quad (K:\text{定数})\right) \tag{5-3-2b}$$

を満足するとき，連続関数の一意的な解 $y(x)$ をもつ．

（証明） 微分方程式 (5-3-1) は積分方程式

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F\left[t, y(t)\right] dt \tag{5-3-3}$$

と等価である．そこで，積分方程式 (5-3-3) を反復法

$$\begin{aligned} y_1(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F[t, y_0]\, dt \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_n(x) &= y_0 + \int_{x_0}^{x} F[t, y_{n-1}(t)]\, dt \end{aligned} \tag{5-3-4}$$

により解くことを考える．閉領域 D 内で関数 $F(x,y)$ の絶対値の上限を M

$$|F(x,y)| < M \quad (\forall(x,y) \in D) \quad (M:\text{定数}) \tag{5-3-5}$$

とすると，変数 x が x_0 の近傍，

$$|x - x_0| < \frac{b}{M} \tag{5-3-6}$$

にあるとき，

$$|y_1(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} F[t, y_0]\, dt\right| < M|x - x_0| < b \tag{5-3-7}$$

であり，$|y_{n-1}(x) - y_0| < b$ と仮定すると，$|F(x, y_{n-1}(x))| < M$ であるから，

$$|y_n(x) - y_0| = \left|\int_{x_0}^{x} F[t, y_{n-1}(t)]\, dt\right| < M|x - x_0| < b \tag{5-3-8}$$

したがって，帰納法により，任意の n に対して

$$|y_n(x) - y_0| < b \tag{5-3-9}$$

が成り立つ．次に，式 (5-3-7) を第一式とする漸化式

$$|y_{n-1}(x) - y_{n-2}(x)| < \frac{MK^{n-2}}{(n-1)!}|x - x_0|^{n-1} \tag{5-3-10}$$

と仮定すると，

---

*2 以下の証明において明らかになるが，1 階常微分方程式 (5-3-1) の初期値問題が連続関数の解 $y(x)$ をもつためには，関数 $F(x,y)$ が連続である必要はなく，有界 $|F(x,y)| < M$ $(\forall(x,y) \in D)$ であれば十分である．

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} \{F[t, y_{n-1}(t)] - F[t, y_{n-2}(t)]\}\, dt \right|$$
$$< \left| \int_{x_0}^{x} K |y_{n-1}(t) - y_{n-2}(t)|\, dt \right| < \frac{MK^{n-1}}{(n-1)!} \left| \int_{x_0}^{x} (t - x_0)^{n-1}\, dt \right|$$
$$= \frac{MK^{n-1}}{n!} |x - x_0|^n \qquad (5\text{-}3\text{-}11)$$

したがって，帰納法により，任意の n に対して

$$|y_n(x) - y_{n-1}(x)| < \frac{MK^{n-1}}{n!} (x - x_0)^n \qquad (5\text{-}3\text{-}12)$$

が成り立つ．それゆえ，

$$y_n(x) = y_0 + \sum_{k=1}^{n} [y_k(x) - y_{k-1}(x)] \qquad (5\text{-}3\text{-}13)$$

は x_0 の近傍 $|x - x_0| < b/M$ において，一様かつ絶対収束し，その極限関数

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) \qquad (5\text{-}3\text{-}14)$$

は，同区間において x の連続関数である．さて，

$$\left| \int_{x_0}^{x} \{F[t, y(t)] - F[t, y_n(t)]\}\, dt \right| < \int_{x_0}^{x} K |y(t) - y_n(t)|\, dt < K\varepsilon_n |x - x_0| < \frac{K\varepsilon_n b}{M}$$
$$\varepsilon_n \to 0, \quad n \to \infty \qquad (5\text{-}3\text{-}15)$$

が成立し，かつ，右辺は x に依存しないので，式 (5-3-14) は一様収束する．したがって，積分と極限操作を交換することができる．

$$y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x) = y_0 + \lim_{n\to\infty} \int_{x_0}^{x} F[t, y_{n-1}(t)]\, dt = y_0 + \int_{x_0}^{x} F\left[t, \lim_{n\to\infty} y_{n-1}(t)\right] dt$$
$$= y_0 + \int_{x_0}^{x} F[t, y(t)]\, dt \qquad (5\text{-}3\text{-}16)$$

すなわち，極限関数 $y(x) = \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ は積分方程式 (5-3-3) の解，したがってこれと等価な微分方程式および初期条件 (5-3-1) を満たす解である．

最後に，$y(x)$ が，微分方程式および初期条件 (5-3-1) を満たす唯一の解であることを示す．もし，$y(x)$ とは異なる解 $z(x)$ が存在すると仮定すると，それは

$$z(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} F[t, z(t)]\, dt \qquad (5\text{-}3\text{-}17)$$

を満たす．ゆえに

$$|z(x) - y_1(x)| \leq \int_{x_0}^{x} \left| F[t, z(t)] - F[t, y_0]\, dt \right| < K \int_{x_0}^{x} |z(t) - y_0|\, dt < Kb|x - x_0|$$
$$(5\text{-}3\text{-}18)$$

そこで，

$$|z(x) - y_{n-1}(x)| < \frac{K^{n-1}b|x - x_0|^{n-1}}{(n-1)!} \tag{5-3-19}$$

を仮定すると，

$$\begin{aligned} |z(x) - y_n(x)| &\leq \int_{x_0}^{x} \Big|F[t, z(t)] - F[t, y_{n-1}(t)]\,dt\Big| \\ &< K \int_{x_0}^{x} |z(t) - y_{n-1}(t)|\,dt < \frac{K^n b|x - x_0|^n}{n!} \end{aligned} \tag{5-3-20}$$

を得る．したがって，帰納法により，任意の n に対して

$$|z(x) - y_n(x)| < \frac{K^n b|x - x_0|^n}{n!} \tag{5-3-21}$$

が成り立つ．それゆえ，解 $z(x)$ は $y(x)$ と同一である．すなわち，微分方程式および初期条件 (5-3-1) を満たす解は一つのみ存在する．

■ ［連立 1 階常微分方程式］

n 階常微分方程式

$$\frac{d^n y}{dx^n} = F(x, y, y', y'', \ldots, y^{(n-1)}) \tag{5-3-22}$$

は n 元 1 階連立常微分方程式

$$\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y_1 \\ &\frac{dy_1}{dx}\left(= \frac{d^2y}{dx^2}\right) = y_2 \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\frac{dy_{n-2}}{dx}\left(= \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right) = y_{n-1} \\ &\frac{dy_{n-1}}{dx}\left(= \frac{d^n y}{dx^n}\right) = F(x, y, y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}) \end{aligned} \tag{5-3-23}$$

に置き換えることができる．

一般の n 元 1 階連立常微分方程式

$$\frac{dy_k}{dx} = F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n) \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{5-3-24}$$

の初期値問題

$$y_k(x_0) = y_k^0 \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{5-3-25}$$

に関する解の存在と一意性の十分条件は，点 (x_0, y_0) を含む閉領域 D

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a, \quad y_k^0 - b_k \leq y_k \leq y_k^0 + b_k \quad (k = 1, \ldots, n)$$

内で関数 $F_k(x, y_1, y_2, \ldots, y_n)$ $(k = 1, \ldots, n)$ が 1 価（連続）であり，かつ，リプシッツ条件

$$\left|F_k(x, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1) - F_k(x, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2)\right|$$
$$< K_1 \left|y_1^1 - y_1^2\right| + K_2 \left|y_2^1 - y_2^2\right| + \cdots + K_n \left|y_n^1 - y_n^2\right|$$
$$(K_k：\text{定数} \quad (k = 1, \ldots, n), \quad \forall (x, y_1^1, y_2^1, \ldots, y_n^1), (x, y_1^2, y_2^2, \ldots, y_n^2) \in D) \tag{5-3-26}$$

を満足することであり，これらが満たされるとき，連立微分方程式 (5-3-24) は，連続関数の一意的な解 $y_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ をもつ．その証明は単独の微分方程式の場合と同様である．

例　線形 1 階連立常微分方程式

線形 1 階連立常微分方程式

$$\frac{dy_k}{dx} = p_1^k(x)y_1 + p_2^k(x)y_2 + \cdots + p_n^k(x)y_n \quad (k = 1, \ldots, n) \tag{5-3-27}$$

の初期値問題

$$y_k(x_0) = y_k^0 \quad (k = 1, \ldots, n) \qquad \text{(5-3-25 再掲)}$$

は，点 (x_0, y_0) を含む閉領域 D

$$x_0 - a \leq x \leq x_0 + a \quad (k = 1, \ldots, n)$$

内で関数 $p_m^k(x)$ $(k, m = 1, \ldots, n)$ が 1 価連続であれば連続関数の一意的な解 $y_k(x)$ $(k = 1, \ldots, n)$ をもつ．■

■ [複素変数の常微分方程式]

複素変数の 1 階常微分方程式の初期値問題

$$\frac{dw}{dz} = F(z, w), \quad w(z_0) = w_0 \tag{5-3-28}$$

のリプシッツ条件は，式 (5-3-28) の右辺 $F(z, w)$ が解析的であること，である．すなわち，複素平面内の点 z_0 を含む半径 d の円板の周を含む内部において $F(z, w)$ が解析的であるならば，点 z_0 の近傍で解析的であり，初期条件 $w(z_0) = w_0$ を満たす解 w が存在し，それは一意的に定まる．その証明は実数関数の場合と同様である．また，解析的な解 w が存在すれば，式 (5-3-28) により，その右辺 $F(z, w)$ は解析的である．

5-4　第 1 種パンルヴェ超越関数の $x = +\infty$ における局所漸近解析

正の x 軸上に無限個の特異点 (極) をもつ第 1 種パンルヴェ方程式の $x = +\infty$ における局所漸近解析を行い，第 1 種パンルヴェ超越関数の漸近級数展開の主要部を求める．それから得られる，第 1 種パンルヴェ超越関数の隣接する特異点の間隔を用いて，1-6 節で紹介した第 1 種パンルヴェ超越関数の特異点を通過する数値計算および，その他の初期条件に対応する複数の数値計算結果を検証する．

第 1 種パンルヴェ方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x \qquad \text{(1-6-18 再掲)}$$

の従属変数 y を

$$y = \sqrt{x}w(x) \qquad (5\text{-}4\text{-}1)$$

により w に変換すると，

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{x}\frac{dw}{dx} + \frac{w}{2\sqrt{x}} \qquad (5\text{-}4\text{-}2)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \sqrt{x}\frac{d^2w}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{x}}\frac{dw}{dx} - \frac{w}{4\sqrt{x^3}} \qquad (5\text{-}4\text{-}3)$$

となるゆえ，従属変数 y の支配方程式 (1-6-18) は従属変数 w の支配方程式

$$\frac{d^2w}{dx^2} = -\frac{1}{x}\frac{dw}{dx} + \frac{w}{4x^2} + \sqrt{x}(6w^2 + 1) \qquad (5\text{-}4\text{-}4)$$

に変換される．

次に，式 (5-4-4) 中の無理式 $\sqrt{x}$ を取り除くべく，独立変数 x を

$$x = t^{\alpha} \quad (\alpha：定数) \qquad (5\text{-}4\text{-}5)$$

により t に変換すると，

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dt}\frac{dt}{dx} = \frac{t^{1-\alpha}}{\alpha}\frac{dw}{dt} \qquad (5\text{-}4\text{-}6)$$

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{t^{2-2\alpha}}{\alpha^2}\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)t^{1-2\alpha}\frac{dw}{dt} \qquad (5\text{-}4\text{-}7)$$

となるので，独立変数 x の方程式 (5-4-4) は独立変数 t の微分方程式

$$\frac{t^{2-2\alpha}}{\alpha^2}\frac{d^2w}{dt^2} + \frac{1}{\alpha}\left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)t^{1-2\alpha}\frac{dw}{dt} = t^{\alpha/2}(6w^2 + 1) - \frac{1}{\alpha}t^{1-2\alpha}\frac{dw}{dt} + \frac{w}{4t^{2\alpha}} \qquad (5\text{-}4\text{-}8)$$

に変換される．したがって，$\alpha = 4/5$ と選択すると，有理式

$$\frac{d^2w}{dt^2} = \frac{16}{25}(6w^2 + 1) - \frac{1}{t}\frac{dw}{dt} + \frac{4w}{25t^2} \qquad (5\text{-}4\text{-}9)$$

を得る．式 (5-4-9) の右辺の第 2，3 項は $t \to +\infty$ すなわち $x \to +\infty$ の極限において，特異点 (2 次の極) および通常点のいずれにおいても第 1 項に比べて無視しうるほど小さい．

$$-\frac{1}{t}\frac{dw}{dt} + \frac{4w}{25t^2} \ll \frac{16}{25}(6w^2 + 1) \qquad t \to +\infty \tag{5-4-10}$$

したがって，微分方程式 (5-4-9) から漸近関係式

$$\frac{d^2w}{dt^2} \sim \frac{16}{25}(6w^2 + 1) \qquad t \to +\infty \tag{5-4-11}$$

を得る．漸近関係式 (5-4-11) の両辺に $\dfrac{dw}{dt}$ を掛けて積分すると，

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 \sim \frac{32}{25}(2w^3 + w + C) \quad (C\text{：定数}) \qquad t \to +\infty \tag{5-4-12}$$

を得る．漸近関係式の漸近関係記号 ~ を等号 = で置き換えた微分方程式

$$\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 = \frac{32}{25}(2w^3 + w + C) \tag{5-4-13}$$

は，ワイエルシュトゥラスの $\mathcal{P}$ 関数 $\mathcal{P}(t)$ の支配方程式である ([15])．

変数 t を実数に限定すると，ワイエルシュトゥラスの $\mathcal{P}$ 関数 $\mathcal{P}(t)$ は単一周期関数である．その周期，すなわち，$t \to +\infty$ の極限における $w(t)$ の周期を T とおくと，

$$w(t + T) = w(t) \tag{5-4-14}$$

であるから，もとの独立変数 x になおすと，

$$w(x^{5/4} + T) = w(x^{5/4}) \tag{5-4-15}$$

となり，隣り合う特異点 (2 次の極) x_{n-1}, x_n には

$$x_{n-1}^{5/4} + T = x_n^{5/4} \tag{5-4-16}$$

ワイエルシュトゥラスの $\mathcal{P}$ 関数

特異点として極のみをもち，極以外の複素平面上のすべてにおいて正則であり，2 重周期 $(2\omega, 2\omega')$ をもつ 1 価複素関数を楕円関数 (elliptic functions) と呼ぶ．したがって，複素平面上の原点と $2\omega, 2\omega'$ で定まる平行四辺形 (基本平行四辺形) を定義域として考察すれば十分である．基本平行四辺形内の極 (同数の零点) の数 (次数を考慮する) を楕円関数の階数 (order) と呼ぶ．階数の最も低い 2 階の楕円関数がヤコビの楕円関数 (単純極を二つもつ) とワイエルシュトゥラスの楕円関数 (2 次の極を一つもつ) である．ワイエルシュトゥラスの楕円関数の支配方程式の係数が実数である場合には，二つの周期を実数と純虚数と選ぶことが可能である．ワイエルシュトゥラスの $\mathcal{P}$ 関数 $\mathcal{P}(t)$ は原点に 2 次の極 $1/z^2$ をもつワイエルシュトゥラスの楕円関数の一つである．

の関係がある．ここで，

$$x_n - x_{n-1} \ll \frac{x_n + x_{n-1}}{2} \qquad x \to +\infty \tag{5-4-17}$$

を用いて (5-4-16) を 2 項展開すると

$$(x_n - x_{n-1})\left(\frac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)^{1/4} \sim \frac{4T}{5}\,(\text{定数}) \qquad x \to +\infty \tag{5-4-18}$$

を得る．

式 (5-4-18) を用いて数値計算を検証する．すなわち，計算により得られた隣り合う特異点 (x_{u-1}, x_n) を式 (5-4-18) の左辺に代入し，それが $x \to +\infty$ で一定値に収束する

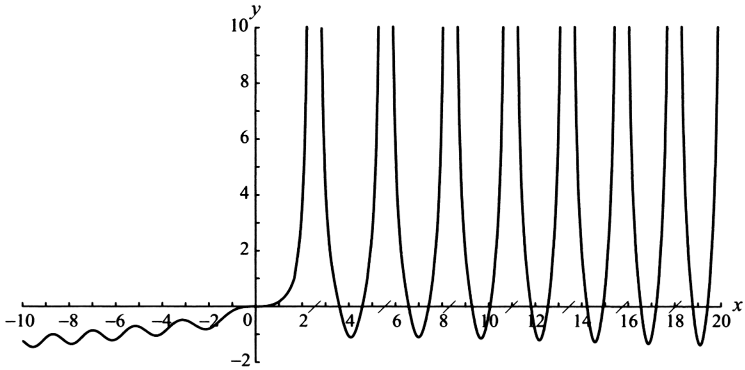


図 5-1　第 1 種パンルヴェ超越関数 y（実線）の特異点を通過する数値計算 1（初期条件 $y(0)=0, dy/dx(x=0)=0$），x の負の部分を含む．v（点線：x 軸を右上がりに横切る斜線）の x 切片が特異点の座標を示す．

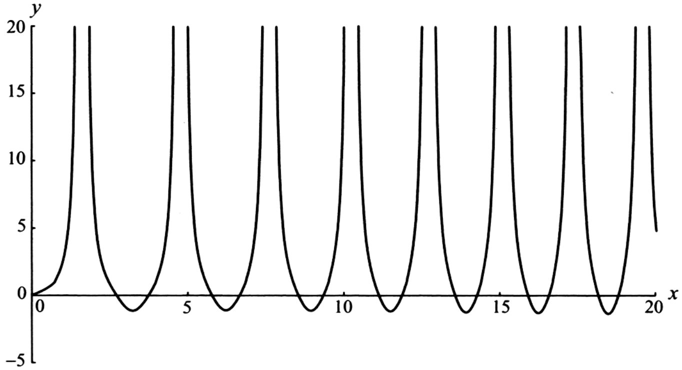


図 5-2　第 1 種パンルヴェ超越関数 y（実線）の特異点を通過する数値計算 2（初期条件 $y(0)=0, dy/dx(x=0)=1$）

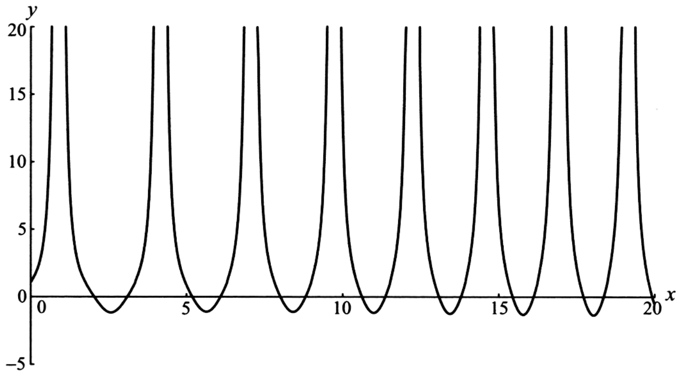


図 5-3　第 1 種パンルヴェ超越関数 y（実線）の特異点を通過する数値計算 3（初期条件 $y(0) = 1, dy/dx(x = 0) = 1$）

ことを確認する.

1-6 節で示したものを含め，三種の初期条件に対応する第 1 種パンルヴェ超越関数の数値計算を実施した（図 5-1〜3）．このうち図 5-1 では特異点近傍の $v(x)$ のグラフおよび $x < 0$ における $y(x)$ のグラフを加えた.

数値計算 1〜3 による特異点の位置（表 5-1）は，およそ $x \geq 10$ の範囲でいずれも第 1 種パンルヴェ超越関数の $x \to +\infty$ における局所漸近解析の結論である式 (5-4-18) ($4T/5 \fallingdotseq 4.58$) を満足している.

表 5-1　第 1 種パンルヴェ超越関数計算例

ケース 1：	$y(0) = 0$　$dy/dx(x = 0) = 0$
特異点（極）x_n	2.52, 5.59, 8.36, 10.99, 13.44, 15.78, 18.04
$(x_n - x_{n-1})\left(\dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)^{1/4}$	4.36, 4.50, 4.64,　4.58,　4.57,　4.58
ケース 2：	$y(0) = 0$　$dy/dx(x = 0) = 1$
特異点（極）x_n	1.62, 4.78, 7.62, 10.29, 12.77, 15.14, 17.42, 19.63
$(x_n - x_{n-1})\left(\dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)^{1/4}$	4.22, 4.48, 4.62,　4.57,　4.58,　4.58,　4.58
ケース 3：	$y(0) = 1$　$dy/dx(x = 0) = 1$
特異点（極）x_n	0.90, 4.17, 7.06, 9.73, 12.28, 14.67, 16.97, 19.19
$(x_n - x_{n-1})\left(\dfrac{x_n + x_{n-1}}{2}\right)^{1/4}$	4.15, 4.45, 4.54, 4.65,　4.58,　4.59,　4.58

5-5　線形斉次常微分方程式の特異点が正規特異点であるための必要十分条件（必要条件であることの証明）

先に 2-3 節で述べたように，点 z_0 が斉次線形常微分方程式

$$\frac{d^n y(z)}{dz^n}+p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}y(z)}{dz^{n-1}}+\cdots+p_2(z)\frac{d^2y(z)}{dz^2}+p_1(z)\frac{dy(z)}{dz}+p_0(z)y(z)=0 \quad \text{(2-1-1 再掲)}$$

の正規特異点であるための必要十分条件は，点 z_0 において係数関数 $p_0(z), p_1(z), \ldots, p_{n-1}(z)$ のいずれかが正則ではないが，

$$(z-z_0)^n p_0(z), \quad (z-x_0)^{n-1}p_1(z), \cdots, (z-z_0)^1 p_{n-1}(z) \quad \text{(2-3-1 再掲)}$$

のすべてが正則であること，すなわち，

$$p_m(z)=\frac{S_m(z)}{(z-z_0)^{n-m}}, \quad S_m(z)：\text{特異点 } z_0 \text{ の近傍で正則な関数}$$
$$(m=0,1,2,\ldots,n-1) \quad \text{(2-3-2 再掲)}$$

と表すことができることである．2-3 節ではこれが十分条件であることを証明したが，残っていた必要条件であることの証明を本節で行う．

正規特異点を $z_0=0$（原点）として一般性を失わない．そして，正規特異点では必ず一つフロベニウス級数解

$$Y_1(z)=z^{\alpha_1}S_1(z) \quad \text{(2-1-19 再掲)}$$

が存在する．ここに $S_1(z)$ は原点を含む領域で正則な関数である．そこで，それ以外の解を

$$y(z)=Y_1(z)\int^z u(t)dt \quad \text{(5-5-1)}$$

とおき，式 (5-5-1) を微分方程式 (2-1-1) に代入すると，

$$\frac{d^{n-1}u(z)}{dz^{n-1}}+q_{n-2}(z)\frac{d^{n-2}u(z)}{dz^{n-2}}+\cdots+q_2(z)\frac{d^2u(z)}{dz^2}+q_1(z)\frac{du(z)}{dz}+q_0(z)u(z)=0$$

$$q_{n-m}(z)=\frac{1}{Y_1(z)}\left[{}_nC_{m-1}\frac{d^{m-1}Y_1(z)}{dz^{m-1}}+{}_{n-1}C_{m-2}\,p_{n-1}(z)\frac{d^{m-2}Y_1(z)}{dz^{m-2}}+\cdots\right.$$
$$\left.+{}_{n-m+2}C_1\,p_{n-m+2}(z)\frac{dY_1(z)}{dz}+p_{n-m+1}(z)Y_1(z)\right] \quad (m=2,3,\ldots,n) \quad \text{(5-5-2)}$$

を得る．$y(z)$ が正規解であるためには，$u(z)$ も正規解でなければならない．

まず，微分方程式 (2-1-1) が 1 階微分方程式（$n=1$）の場合

$$\frac{dy(z)}{dz}+p_0(z)y(z)=0 \quad \text{(5-5-3)}$$

を考えよう．このとき，一般解は

$$y(z) = \exp\left(-\int^z p_0(t)\,dt\right) \tag{5-5-4}$$

であるから，これが正規解であるためには

$$p_0(z) = \frac{S_0(z)}{z} \quad \left(\text{すなわち} \quad p_0(z) = \frac{S_0(z)}{z^n} \quad (n = 1)\right)$$

$$(S_0(z)\ \text{は原点を含む領域で正則}) \tag{5-5-5}$$

でなければならない．

次に2階微分方程式 ($n = 2$) の場合を考える．

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + p_0(z)y(z) = 0 \tag{5-5-6}$$

を考える．このとき $u(z)$ の微分方程式 (5-5-2) は1階

$$\frac{du(z)}{dz} + q_0(z)u(z) = 0 \tag{5-5-7a}$$

$$q_0(z) = \frac{1}{Y_1(z)}\left[2\frac{dY_1(z)}{dz} + p_1(z)Y_1(z)\right] \tag{5-5-7b}$$

である．式 (5-5-7a) は式 (5-5-3) と同型であるから，$u(z)$ が正規解であるためには，

$$q_0(z) = \frac{T(z)}{z} \quad (T(z)\ \text{は原点を含む領域で正則}) \tag{5-5-8}$$

でなければならない．また，

$$\frac{1}{Y_1(z)}\frac{dY_1(z)}{dz} = O\left(\frac{1}{z}\right) \qquad z \to 0 \tag{5-5-9}$$

であるから，式 (5-5-7b) より，

$$p_1(z) = \frac{S_1(z)}{z} \quad \left(\text{すなわち} \quad p_1(z) = \frac{S_1(z)}{z^{n-1}} \quad (n = 2)\right)$$

$$(S_1(z)\ \text{は原点を含む領域で正則}) \tag{5-5-10}$$

でなければならない．同様に式 (5-5-6) より

$$p_0(z) = -\frac{1}{y(z)}\left[\frac{d^2y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz}\right]$$

は

$$p_0(z) = \frac{S_2(z)}{z^2} \quad \left(\text{すなわち} \quad p_0(z) = \frac{S_2(z)}{z^n} \quad (n = 2)\right) \tag{5-5-11}$$

でなければならない．

以下，数学的帰納法を用いる．すなわち，特異点が正規特異点であるための必要条件が

$$q_m(z) = \frac{T_m(z)}{z^{n-m-1}} \quad (T_m(z)\text{ は原点を含む領域で正則})$$

$$(m = 0, 1, 2, 3, \ldots, n-2) \quad (5\text{-}5\text{-}12)$$

であることが，$n-1$ 階まで証明されていると仮定する．すると，式 (5-5-2) の第 1 式 ($m = 2$)

$$q_{n-2}(z) = \frac{1}{Y_1(z)}\left[n\frac{dY_1(z)}{dz} + p_{n-1}(z)Y_1(z)\right]$$

と式 (5-5-12) より

$$p_{n-1}(z) = \frac{S_{n-1}(z)}{z} \quad (S_{n-1}(z)\text{：特異点 } z_0 \text{ の近傍で正則な関数}) \quad (5\text{-}5\text{-}13)$$

を得，続いて式 (5-5-2) の第 2 式 ($m = 3$)

$$q_{n-3}(z) = \frac{1}{Y_1(z)}\left[{}_nC_2\frac{d^2Y_1(z)}{dz^2} + {}_{n-1}C_1 p_{n-1}(z)\frac{dY_1(z)}{dz} + p_{n-2}(z)Y_1(z)\right]$$

と式 (5-5-12), (5-5-13) より

$$p_{n-2}(z) = \frac{S_{n-2}(z)}{z^2} \quad (S_{n-2}(z)\text{：特異点 } z_0 \text{ の近傍で正則な関数}) \quad (5\text{-}5\text{-}14)$$

を得る．これを繰り返すことにより

$$p_{n-m}(z) = \frac{S_{n-m}(z)}{z^m} \quad (5\text{-}5\text{-}15a)$$

すなわち

$$p_m(z) = \frac{S_m(z)}{z^{n-m}}$$

$$(S_m(z)\text{：特異点 } z_0 \text{ の近傍で正則な関数 } (m = 1, 2, \ldots, n-1)) \quad (5\text{-}5\text{-}15b)$$

を得ることができる．

残る $p_0(z)$ は

$$p_0(z) = \frac{-1}{y(z)}\left[\frac{d^ny(z)}{dz^n} + p_{n-1}(z)\frac{d^{n-1}y(z)}{dz^{n-1}} + \cdots + p_2(z)\frac{d^2y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz}\right]$$

より，

$$p_0(z) = \frac{S_{00}(z)}{z^n} \quad (S_{00}(z)\text{ は原点を含む領域で正則}) \quad (5\text{-}5\text{-}16)$$

を得る．式 (5-5-15b) および式 (5-5-16) が式 (2-3-2) である．（証明終わり）

5-6　特殊関数の諸公式

本書に現れる特殊関数に関する基本性質を掲げる．これらはいずれも微分方程式の漸近解析において重要な役割を担う関数である．詳しくは参考文献，たとえば，文献

[15] などを参照されたい．なお，以下では特に断らない限り，z は複素数，x は実数，n は整数を表すものとする．

A. ベッセル関数

円筒座標によるラプラスの方程式がベッセルの微分方程式となるため，ベッセル関数を円柱（円筒）関数とも呼ぶことがある．正規特異点 $z = 0$ と非正規特異点 $z = \infty$ を有するベッセルの微分方程式

$$z^2 y'' + zy' + (z^2 - \nu^2)y = 0 \tag{A-1}$$

の解には，第 1 種ベッセル関数 $J_{\pm\nu}(z)$，第 2 種ベッセル関数 $Y_\nu(z)$，第 1 種ハンケル (Hankel) 関数 $H_\nu^{(1)}(z)$，第 2 種ハンケル関数 $H_\nu^{(2)}(z)$ がある．このうち，第 1 種ベッセル関数 $J_n(z)$ と $J_{-n}(z)$ は ν が整数 n であるときに限り一次従属

$$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$$

であるが，それ以外の場合にはこれら四つの解のうち，任意の二つの線形結合がベッセルの微分方程式 (A-1) の一般解である．

解のうち，$J_n(z)$（n：整数）は全複素平面において正則な整関数 (entire functions) であり，それ以外は負の実数軸に分岐 (cut) をもつ解析関数 (regular functions, holomorphic functions) である．このうち，$J_0(z)$，$J_1(z)$ を図 5-4 に示す．

$J_\nu(z)$, $Y_n(z)$ のフロベニウス級数展開は，

$$J_\nu(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(\nu + k + 1)} \tag{A-2a}$$

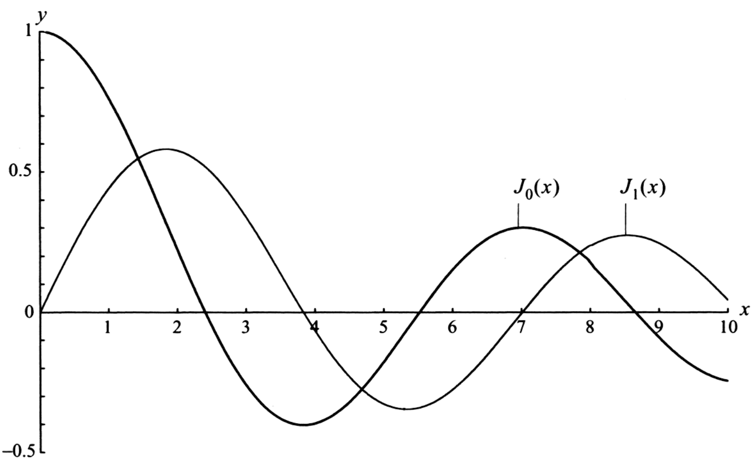


図 5-4　第 1 種ベッセル関数 $J_0(x), J_1(x)$

$$Y_n(z) = -\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{-n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{(n-k-1)!(z^2/4)^k}{k!} + \frac{2}{\pi}\log\left(\frac{z}{2}\right)J_n(z)$$

$$-\frac{1}{\pi}\left(\frac{z}{2}\right)^{n}\sum_{k=0}^{\infty}(\psi(k+1)+\psi(n+k+1))\frac{(-z^2/4)^k}{k!(n+k)!} \quad \text{(A-2b)}$$

である．ここに $\psi(z)$ はプサイ (psi) 関数である（C. ガンマ関数参照）．

各ベッセル関数 $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ の間の関係は

$$Y_\nu(z) = \frac{J_\nu(z)\cos(\nu\pi) - J_{-\nu}(z)}{\sin(\nu\pi)} \quad （\nu \neq 整数,\ \nu = 整数ではその極限） \quad \text{(A-3a)}$$

$$H_\nu^{(1)}(z) = J_\nu(z) + iY_\nu(z) \quad \text{(A-3b)}$$

$$H_\nu^{(12)}(z) = J_\nu(z) - iY_\nu(z) \quad \text{(A-3c)}$$

である．$J_\nu(x)$ の母関数は

$$\exp\left(\frac{z(t-1/t)}{2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} t^n J_n(z) \quad \text{(A-4)}$$

である．

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ の積分表示は以下のとおりである．

$$J_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \frac{\sin\nu\pi}{\nu\pi}\int_0^{\infty}\exp(-z\sinh t - \nu t)\,dt$$

$$(|\arg z| < \pi/2) \quad \text{(A-5a)}$$

$$J_n(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\cos(z\sin\theta - n\theta)d\theta = \frac{i^{-n}}{\pi}\int_0^{\pi}\exp(iz\cos\theta)\cos(n\theta)\,d\theta \quad \text{(A-5b)}$$

$$J_n(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \exp(z\sinh w - nw)\,dw \quad \text{(A-5c)}$$

ただし，積分径路 C は $\infty - i\pi, \infty + i\pi$ の二つをそれぞれ始点・終点とする任意の曲線である．

$$Y_\nu(z) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin(z\sin\theta - \nu\theta)\,d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty}(e^{\nu t} + e^{-\nu t}\cos\nu\pi)\exp(-z\sinh t)\,dt$$

$$(|\arg z| < \pi/2) \quad \text{(A-6)}$$

ベッセル関数 $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ の $z \to \infty$ における漸近展開は，漸近級数を係数にもつ正弦関数の形をもつ．

$$J_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(P(\nu,z)\cos\left(z - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) - Q(\nu,z)\sin\left(z - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)\right)$$

$$(|\arg z| < \pi) \quad \text{(A-7)}$$

$$Y_\nu(z) = \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\left(P(\nu,z)\sin\left(z - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right) + Q(\nu,z)\cos\left(z - \frac{(2\nu+1)\pi}{4}\right)\right)$$

$$(|\arg z| < \pi) \quad \text{(A-8)}$$

$$P(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k)}{(2z)^{2k}}$$
$$= 1 - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)}{2!(8z)^2} + \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)(4\nu^2 - 49)}{4!(8z)^4} - \cdots \quad \text{(A-9a)}$$

$$Q(\nu, z) \sim \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{(\nu, 2k+1)}{(2z)^{2k+1}}$$
$$= \frac{4\nu^2 - 1}{8z} - \frac{(4\nu^2 - 1)(4\nu^2 - 9)(4\nu^2 - 25)}{3!(8z)^3} + \cdots \quad \text{(A-9b)}$$

ここに

$$(\nu, 2k) \equiv \frac{\Gamma(\nu + 1/2 + 2k)}{(2k)!\Gamma(\nu + 1/2 - 2k)} \quad \text{(A1-10)}$$

はハンケルの記号である．また，$J_\nu(\nu)$, $Y_\nu(\nu)$ の $\nu \to +\infty$ における漸近展開の主要部は以下のとおりである．

$$J_\nu(\nu) \sim \frac{\Gamma(1/3)}{2^{2/3} 3^{1/6} \pi \nu^{1/3}} \quad \text{(A-11)}$$

$$Y_\nu(\nu) \sim -\frac{3^{1/3}\Gamma(1/3)}{2^{2/3} \pi \nu^{1/2}} \quad \text{(A-12)}$$

$J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ の $z \to \infty$ における漸近展開 (A-7, 8) からハンケル関数 $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ の $z \to \infty$ における漸近展開の主要部は，

$$H_\nu^{(1)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (-\pi < \arg z < 2\pi) \quad \text{(A-13a)}$$

$$H_\nu^{(2)}(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \exp -i\left(z - \frac{\nu\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (-2\pi < \arg z < \pi) \quad \text{(A-13b)}$$

であり，第 1 種ハンケル関数は波源から無限遠に放射する波動が満たすべき境界条件を満足する．

ベッセル関数の微分を含む漸化式のうち主なものを掲げる．なお，以下の関係式を第 1 種のベッセル関数 $J_\nu(z)$ で代表して示すが，4 種のベッセル関数 $J_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$, $H_\nu^{(1)}(z)$, $H_\nu^{(2)}(z)$ に共通して成立する．

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k [z^\nu J_\nu(z)] = z^{\nu-k} J_{\nu-k}(z) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(A-14a)}$$

$$\left(\frac{1}{z}\frac{d}{dz}\right)^k [z^{-\nu} J_\nu(z)] = (-1)^k z^{-\nu-k} J_{\nu+k}(z) \quad (k = 0, 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{(A-14b)}$$

B. エィリー関数

非正規特異点 $z=\infty$ を有するエィリーの微分方程式

$$y''=zy \tag{B-1}$$

の一般解はエィリー関数 $Ai(z)$ と $Bi(z)$ の線形結合である．前者を第1種のエィリー関数，後者を第2種のエィリー関数と呼ぶことがある（図5-5）．エィリーの微分方程式の右辺 y の係数 z が正の実数軸上 $(x>0)$ にあるとき，解 y は指数関数的振る舞いを見せる．すなわち，$Ai(x)$ は指数関数的に減衰し，$Bi(x)$ は指数関数的に発散する．一方，右辺 y の係数 z が負の実数軸上 $(x<0)$ にあるとき，解 y は正弦関数的な振動解となる．特に $Ai(x)$ は，力学的全エネルギーがポテンシャルエネルギーを超えない区間 $(x<0)$ では通常の振動解であり，一方，力学的全エネルギーがポテンシャルエネルギーを超える区間 $(x>0)$，すなわち古典力学的には進入することが不可能な区間へ染み出してゆく量子力学的効果を表現する関数である．

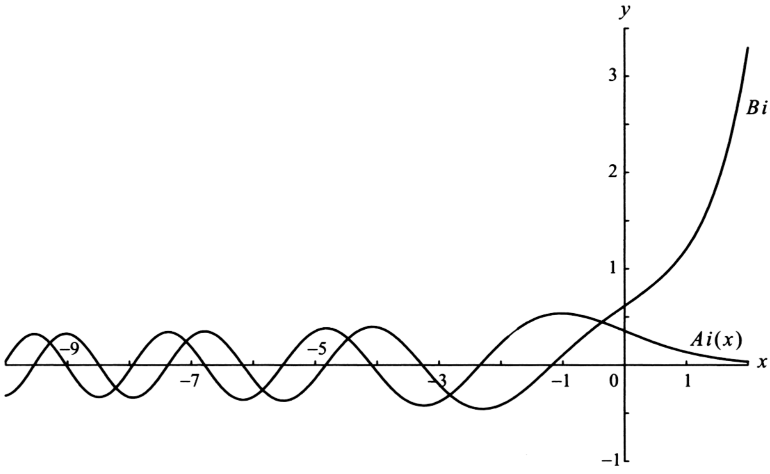


図 5-5 エィリー関数

エィリー関数のテイラー級数展開は次式である．

$$\begin{aligned}Ai(x)&=3^{-2/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3^{2n}n!\Gamma(n+2/3)}-3^{-4/3}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3^{2n}n!\Gamma(n+4/3)}\\Bi(x)&=3^{-1/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n}}{3^{2n}n!\Gamma(n+2/3)}+3^{-5/6}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{3n+1}}{3^{2n}n!\Gamma(n+4/3)}\end{aligned} \tag{B-2}$$

エィリー関数の漸近級数展開は次式である．

$$Ai(z) \sim \frac{1}{2\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(-\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_n \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-n} \qquad z \to \infty \quad (|\arg z| < \pi)$$

$$Bi(z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \exp\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \sum_{n=0}^{\infty} c_n \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-n} \qquad z \to \infty \quad (|\arg z| < \pi/3)$$

$$Ai(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \left(\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n} \right.$$
$$\left. - \cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n+1} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n-1} \right) \qquad z \to \infty \quad (|\arg z| < 2\pi/3)$$

$$Bi(-z) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} z^{-1/4} \left(\sin\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n+1} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n-1} \right.$$
$$\left. + \cos\left(\frac{2}{3}z^{3/2} + \frac{\pi}{4}\right) \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n c_{2n} \left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right)^{-2n} \right) \qquad z \to \infty \quad (|\arg z| < 2\pi/3)$$

$$c_0 = 1, \quad c_n = \frac{\Gamma(3n + 1/2)}{54^n n! \Gamma(n + 1/2)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{B-3}$$

エィリー関数はベッセル関数で表すことができる．

$$Ai(-z) = \frac{\sqrt{z}}{3} \left(J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) + J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \right)$$
$$Bi(-z) = \sqrt{z/3} \left(J_{-1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) - J_{1/3}\left(\frac{2}{3}z^{3/2}\right) \right) \tag{B-4}$$

エィリー関数の積分表示は以下のとおりである．

$$Ai(\pm x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos\left(\frac{1}{3}t^3 \pm xt\right) dt$$
$$Bi(\pm x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\exp\left(-\frac{1}{3}t^3 \pm xt\right) + \sin\left(\frac{1}{3}t^3 \pm xt\right) \right] dt \tag{B-5}$$

C. ガンマ関数（gamma function）

ガンマ関数 $\Gamma(z)$ は次の積分

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} \, dt \quad (\mathrm{Re}\, z > 0) \tag{C-1}$$

で定義され，差分方程式

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) \tag{C-2}$$

を満足する．それゆえ，

$$\Gamma(z) = \Gamma(z + 1)/z$$

を用いて，複素平面全体に解析接続することができる．その特異点（1 次の極）は

$$z = -n \quad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

である．特に，独立変数 z が自然数 n であるとき，

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = (n-1)! \tag{C-3}$$

であるから，ガンマ関数は一般化された階乗関数とみなすことができる．

ガンマ関数の漸近展開（スターリング（Stirling）の公式）は次式である．

$$\Gamma(z) \sim (z/e)^z \sqrt{\frac{2\pi}{z}}\left(1 + \frac{1}{12z} + \frac{1}{288z^2} - \frac{139}{51840z^3} - \frac{571}{2488320z^4} + \cdots\right)$$
$$z \to \infty \quad (|\arg z| < \pi) \tag{C-4}$$

独立変数の特定の値に対して，

$$\Gamma(1) = 1, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \sqrt{\pi}/2 \tag{C-5}$$

という値を得る．次の公式

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = -z\Gamma(-z)\Gamma(z) = \pi \operatorname{cosec}(\pi z) \tag{C-6}$$

は数値計算上有用である．

ガンマ関数の二重公式および三重公式はそれぞれ，

$$\Gamma(2z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{2z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{2}\right) \tag{C-7a}$$

$$\Gamma(3z) = \frac{1}{2\pi} 3^{3z-1/2}\Gamma(z)\Gamma\left(z + \frac{1}{3}\right)\Gamma\left(z + \frac{2}{3}\right) \tag{C-7b}$$

である．

ガンマ関数の対数の導関数をプサイ関数 $\psi(z)$ と呼ぶ．

$$\psi(z) = d(\log\Gamma(z))/dz = \Gamma'(z)/\Gamma(z) \tag{C-8}$$

プサイ関数は

$$\psi(1) = -\log\gamma, \quad \psi(n) = -\log\gamma + \sum_{k=1}^{n-1} 1/k \tag{C-9}$$

という値をとる．ここに

$$\log\gamma \equiv \lim_{n\to\infty}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - \log n\right] = 0.577\ldots \tag{C-10}$$

はオイラー（Euler）定数である．

第 5 章の演習問題

5-1　微分方程式 $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ の初期条件 $(x, y) = (0, -1)$ を満たす解を求めよ.

5-2　比試験の公式 (5-2-5) を証明せよ.

5-3　**関数 $F(x, y)$ が連続でない例**

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (x \geq 0), \qquad \frac{dy}{dx} = -y \quad (x < 0), \qquad x = 0,\ y = 1$$

が連続関数の解を有することを確認せよ.

5-4　**関数 $F(x, y)$ がリプシッツ条件を満たさない例**

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}, \quad x = 0,\ y = 0$$

の解は一意的ではないことを確認せよ.

演習問題の解答

■ 第 1 章（p. 42）

1-1

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y} = \frac{\cos\theta + \sin\theta}{\cos\theta - \sin\theta} \tag{1-4-24}$$

より

$$dr = dx\cos\theta + dy\sin\theta = -dx\sin\theta + dy\cos\theta$$

および

$$d\theta = -dx\frac{\sin\theta}{r} + dy\frac{\cos\theta}{r} = \frac{dr}{r}$$

を得る．ゆえに

$$r = C\exp\theta \quad （C：定数） \tag{1-4-26}$$

1-2

$$y(x) \sim \frac{-1}{x-x_0} + c(x-x_0)^k, \quad k \geq 0 \qquad x \to x_0 \quad （c：定数）$$

とおくと (1-6-1) は

$$\frac{dy}{dx} \sim \frac{1}{(x-x_0)^2} + ck(x-x_0)^{k-1} = \frac{1}{(x-x_0)^2} - 2c(x-x_0)^{k-1} + c^2(x-x_0)^{2k} + 1$$

となるので

$$ck(x-x_0)^{k-1} \sim -2c(x-x_0)^{k-1} + 1$$

これから $k = 1, c = 1/3$

$$y(x) \sim \frac{-1}{x-x_0} + \frac{x-x_0}{3} \qquad x \to x_0$$

1-3

$$\frac{1}{v^2} = \frac{1}{(x-x_0)^2} - \frac{x}{10}(x-x_0)^2 - \frac{1}{15}(x-x_0)^3 + a_4(x-x_0)^4 + \frac{x_0^2}{300}(x-x_0)^6 + o(x-x_0)^6$$

$$x \to x_0 \quad (1\text{-}6\text{-}27)$$

ゆえ

$$v^2 = (x-x_0)^2\left[1 + \frac{x}{10}(x-x_0)^4 + \frac{1}{15}(x-x_0)^5 - a_4(x-x_0)^6 + o(x-x_0)^6\right] \quad x \to x_0$$

これから

$$(x-x_0)^2 = v^2\left[1 - \frac{x}{10}v^4 - \frac{1}{15}v^5 + a_4v^6 + o(v^6)\right] \quad x \to x_0$$

すなわち

$$x - x_0 = v\left[1 - \frac{x}{20}v^4 - \frac{1}{30}v^5 + \frac{1}{2}a_4v^6 + o(v^6)\right] \quad x \to x_0$$

および

$$-\frac{2}{(x-x_0)^3} = -\frac{2}{v^3}\left[1 + \frac{3}{20}xv^4 + \frac{1}{10}v^5 - \frac{3}{2}a_4v^6 + o(v^6)\right] = -\frac{2}{v^3} - \frac{3}{10}xv - \frac{1}{5}v^2 + 3a_4v^3 + o(v^3) \quad x \to x_0$$

を得る．これを (1-6-28) に代入すると，

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{v^3} - \frac{xv}{2} - \frac{v^2}{2} + 7a_4v^3 + o(v^3) \quad x \to x_0 \tag{1-6-30}$$

1-4

$$\frac{dv}{dx} = 1 + \frac{v^4}{4}\left[x + v - 2uv^2\right] \tag{1-6-33}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 6y^2 + x = \frac{6}{v^4} + x \tag{1-6-18}$$

一方 (1-6-31) より

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left[\frac{6}{v^4} - \frac{x}{2} - v + 3uv^2\right]\frac{dv}{dx} - \frac{v}{2} + v^3\frac{du}{dx}$$

ゆえに

$$\frac{6}{v^4} + x = \left[\frac{6}{v^4} - \frac{x}{2}v + 3uv^2\right]\left[1 + \frac{v^4}{4}(x + v - 2uv^2)\right] - \frac{v}{2} + v^3\frac{du}{dx}$$

これを整理すると

$$\frac{du}{dx} = \frac{xv}{8}[x + 3v] + \left(\frac{1}{4} - xu - \frac{5uv}{4} + \frac{3u^2v^2}{2}\right)v^3 \tag{1-6-34}$$

■ 第 2 章（p. 79）

2-1

$$\frac{dW(z)}{dz} = \det\begin{vmatrix} y_1'(z) & y_2'(z) & \cdots & y_n'(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) & \cdots & y_n'(z) \\ y_1^{(2)}(z) & y_2^{(2)}(z) & \cdots & y_n^{(2)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(z) & y_2^{(n-1)}(z) & \cdots & y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix} + \det\begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \cdots & y_n(z) \\ y_1^{(2)}(z) & y_2^{(2)}(z) & \cdots & y_n^{(2)}(z) \\ y_1^{(2)}(z) & y_2^{(2)}(z) & \cdots & y_n^{(2)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n-1)}(z) & y_2^{(n-1)}(z) & \cdots & y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix}$$

$$+ \cdots + \det\begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \cdots & y_n(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) & \cdots & y_n'(z) \\ y_1^{(2)}(z) & y_2^{(2)}(z) & \cdots & y_n^{(2)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y_1^{(n)}(z) & y_2^{(n)}(z) & \cdots & y_n^{(n)}(z) \end{vmatrix}$$

$$
= \det \begin{vmatrix} y_1(z) & y_2(z) & \cdots & y_n(z) \\ y_1'(z) & y_2'(z) & \cdots & y_n'(z) \\ y_1^{(2)}(z) & y_2^{(2)}(z) & \cdots & y_n^{(2)}(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -p_{n-1}(z)y_1^{(n-1)}(z) & -p_{n-1}(z)y_2^{(n-1)}(z) & \cdots & -p_{n-1}(z)y_n^{(n-1)}(z) \end{vmatrix}
$$

$$
= -p_{n-1}(z)W(z)
$$

2-2 $y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \dfrac{t}{\lambda_k}$ (2-1-29)

および (2-1-31) の任意の $y_l(l \geq 3)$ は (2-1-30) を満たす．また，

$$
\lambda_k \left[y_l(t+1) - y_l(t) \right] = \lambda_k \sum_{i=1}^{l} [s_i(t+1) - s_i(t)] u_i(t)
$$

$$
= \sum_{i=2}^{l} s_{i-1}(t) u_i(t) = \sum_{i=1}^{l-1} s_i(t) \tilde{u}_i \cdot (t) = y_{l-1}(t) \qquad (\tilde{u}_i(t) = u_{i+1}(t))
$$

ゆえに，(2-1-32) は (2-1-30) の一般解である．

2-3 通常点 z_1 においてフロベニウス級数の解

$$
y(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_1)^{\alpha+k} \quad (a_0 \neq 0) \tag{2-3-4}
$$

$$
p_j(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{j,k} (z - z_1)^k
$$

を仮定する．

$$
\frac{d^n y(z)}{dz^n} + p_{n-1}(z) \frac{d^{n-1} y(z)}{dz^{n-1}} + \cdots + p_2(z) \frac{d^2 y(z)}{dz^2} + p_1(z) \frac{dy(z)}{dz} + p_0(z) y(z) = 0
$$

に代入し，展開の最低次の項 $(z - z_1)^{\alpha - n}$ の係数を比較すると

$$
\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \cdots (\alpha - n + 1) a_0 = 0
$$

$a_0 \neq 0$ ゆえ，α は自然数，すなわち (2-3-4) はテイラー級数である．

2-4 $z = -k\ (k = 0, 1, 2, \ldots)$ は $\Gamma(z)$ の 1 次の極であるゆえ，

$$
J_{-n}(z) = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(-n+k+1)} = \left(\frac{z}{2}\right)^{-n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^{n+k}}{(n+k)!\Gamma(k+1)}
$$

$$
= \left(-\frac{z}{2}\right)^{n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-z^2/4)^k}{k!\Gamma(n+k+1)} = (-1)^n J_n(z)
$$

2-5 式 (2-3-36) の右辺第 2 項をテイラー級数展開したもの

$$
y(z) = J_0(z) \log z + \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k
$$

の導関数

$$
y'(z) = J_0(z) \log z + \frac{J_0(z)}{z} + \sum_{k=1}^{\infty} k b_k z^{k-1}
$$

$$y''(z) = J_0''(z)\log z + \frac{2J_0'(z)}{z} - \frac{J_0(z)}{z^2} + \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)b_k z^{k-2}$$

を (A-1) で $\nu = 0$ とおいたものに代入すると

$$2J_0'(z) = -\sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)b_k z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} kb_k z^{k-1} - \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^{k+1}$$

を得る．

左辺に第 1 種ベッセル関数のフロベニウス ($n = 0$ のときテイラー級数) 展開式

$$J_0(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}$$

を代入して $\{b_m\}$ の漸化式

$$(2m+1)^2 b_{2m+1} + b_{2m-1} = 0, \quad b_1 = 0$$

$$\frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m+1)!m!} = -(2m+2)^2 b_{2m+2} - b_{2m}, \quad 1 = 4b_2$$

を得る．これから

$$b_{2m-1} = 0, \quad b_{2m} = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{m}\right) = \frac{(-1)^{m+1}}{2^{2m}(m!)^2}(\psi(m+1) + \log\gamma)$$

こうして得られた，$y(z)$ と $J_0(z)$ の一次結合として，次の組合せを選び，0 次の**第 2 種ベッセル関数**

$$Y_0(z) = \frac{2}{\pi}[y(z) + (\log\gamma - \log 2)J_0(z)]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[J_0(z)\left(\log\frac{z}{2} + \log\gamma\right) + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m+1}(\psi(m+1) + \log\gamma)z^{2m}}{2^{2m}(m!)^2}\right] \qquad (2\text{-}3\text{-}37)$$

を得る．

2-6　三つの方程式を

$$\frac{d^2y(z)}{dz^2} + p_1(z)\frac{dy(z)}{dz} + p_0(z)y(z) = 0 \qquad (2\text{-}4\text{-}1)$$

と整理すると，それぞれ

$$p_1(z) = \frac{1}{z}, \quad p_0(z) = 1 - \frac{\nu^2}{z^2}$$

$$p_1(z) = 0, \quad p_0(z) = -z$$

$$p_1(z) = 0, \quad p_0(z) = -(z^2/4 + k)$$

であり，無限遠点 $z = \infty$ が通常点である条件

$$p_1(z) = \frac{2}{z} + O(z^{-2}) \qquad z \to \infty \qquad (1\text{-}4\text{-}22a)$$

かつ

$$p_0(z) = O(z^{-4}) \qquad z \to \infty \qquad (1\text{-}4\text{-}22b)$$

および (1-4-21) と (2-3-2) から得られる正規特異点である条件

$$p_1(z) = O(z^{-1}) \qquad z \to \infty$$

かつ

$$p_0(z) = O(z^{-2}) \qquad z \to \infty$$

のいずれも満足しない．

2-7　エィリーの微分方程式

$$y'' = xy \tag{B-1}$$

の解を

$$y = \exp(Q(x)) \tag{1-1-26}$$

とおき，これを微分方程式 (B-1) に代入すると，

$$\left[\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - x\right]\exp(Q) = 0$$

となり，共通因子 exp(Q) で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階微分方程式

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - x = 0$$

を得る．ここで $x = -\infty$ が非正規特異点であるゆえ，

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x \to -\infty \tag{2-4-3}$$

と，仮定すると，

$$\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \sim x \qquad x \to -\infty$$

得，これから

$$\frac{dQ}{dx} \sim \pm i\sqrt{-x} \qquad x \to -\infty$$

したがって，

$$Q(x) \sim \pm 2i(-x)^{3/2}/3 + C \qquad x \to -\infty \quad (C：定数)$$

を得る．$Q(x)$ は仮定 (2-4-3) を満たしている．

主要部を得るために

$$Q(x) = \pm 2i(-x)^{3/2}/3 + R(x), \quad \pm 2i(-x)^{3/2}/3 \gg R(x) \qquad x \to -\infty$$

とおくと，

$$\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 - x = \pm\frac{i}{2\sqrt{-x}} + x - x + \frac{d^2R}{dx^2} + \left(\frac{dR}{dx}\right)^2 \mp 2i\sqrt{-x}\frac{dR}{dx} = 0$$

となり卓越項は

$$\frac{dR}{dx} \sim -1/(4x)$$

ゆえに

$$R(x) \sim -(1/4)\log(-x)$$

を得る．ここで二つの解

$$\exp(Q) \sim (-x)^{-1/4}\exp\left(\pm 2i\sqrt{(-x)^3}/3 + C\right)$$

の代わりに独立な二つの実関数の和

$$y \sim \frac{A}{\sqrt[4]{-x}}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)+\frac{B}{\sqrt[4]{-x}}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right) \qquad x\to-\infty$$

を採用する．最も粗い取り扱いで，上式で $A=0$ とおいたものが $Ai(x)$ の，また $B=0$ とおいたものが $Bi(x)$ の $x\to-\infty$ におけるよい近似式になっている (B-3)．ここで

$$y=\frac{A(x)}{\sqrt[4]{-x}}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)+\frac{B(x)}{\sqrt[4]{-x}}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right) \quad (A, B：定数)$$

とおくと，

$$\begin{aligned}
y' =& \frac{A'(x)}{\sqrt[4]{-x}}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)+\frac{A(x)}{4\sqrt[4]{(-x)^5}}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
&+A(x)\sqrt[4]{-x}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)+\frac{B'(x)}{\sqrt[4]{-x}}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
&+\frac{B(x)}{4\sqrt[4]{(-x)^5}}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)-B(x)\sqrt[4]{-x}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
y'' =& \frac{A''(x)}{\sqrt[4]{-x}}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)+\frac{A'(x)}{2\sqrt[4]{(-x)^5}}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
&+2A'(x)\sqrt[4]{-x}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)+\frac{5A(x)}{16\sqrt[4]{(-x)^9}}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
&-A(x)\sqrt[4]{(-x)^3}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)+\frac{B''(x)}{\sqrt[4]{-x}}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
&+\frac{B'(x)}{2\sqrt[4]{(-x)^5}}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)-2B'(x)\sqrt[4]{-x}\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
&+\frac{5B(x)}{16\sqrt[4]{(-x)^9}}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)-B(x)\sqrt[4]{(-x)^3}\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)
\end{aligned}$$

ゆえ，微分方程式 (B-1) に代入し，

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{A''(x)}{\sqrt[4]{-x}}+\frac{A'(x)}{2\sqrt[4]{(-x)^5}}+\frac{5A(x)}{16\sqrt[4]{(-x)^9}}-2B'(x)\sqrt[4]{-x}\right]\cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)\\
&\left[2A'(x)\sqrt[4]{-x}+\frac{B''(x)}{\sqrt[4]{-x}}+\frac{B'(x)}{2\sqrt[4]{(-x)^5}}+\frac{5B(x)}{16\sqrt[4]{(-x)^9}}\right]\sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3+\phi\right)=0
\end{aligned}$$

を得る．$A(x), B(x)$ の二つの関数を導入するにあたり，もう一つ自由に条件を与えることができるので，

$$2A'(x)\sqrt[4]{-x}+\frac{B''(x)}{\sqrt[4]{-x}}+\frac{B'(x)}{2\sqrt[4]{(-x)^5}}+\frac{5B(x)}{16\sqrt[4]{(-x)^9}}=0$$

すなわち

$$B''(x)-\frac{B'(x)}{2x}+\frac{5B(x)}{16x^2}+2A'(x)\sqrt{-x}=0 \tag{1}$$

を課すと，

$$\frac{A''(x)}{\sqrt[4]{-x}}+\frac{A'(x)}{2\sqrt[4]{(-x)^5}}+\frac{5A(x)}{16\sqrt[4]{(-x)^9}}-2B'(x)\sqrt[4]{-x}=0$$

すなわち

$$A''(x) - \frac{A'(x)}{2x} + \frac{5A(x)}{16x^2} - 2B'(x)\sqrt{-x} = 0 \tag{2}$$

(1)，(2) を満たす $A(x), B(x)$ の $(-x)^{-3/2}$ ベキによる漸近級数解

$$A(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} a_n(-x)^{-3n/2}, \quad B(x) \sim \sum_{n=0}^{\infty} b_n(-x)^{-3n/2} \qquad x \to -\infty \tag{3}$$

を得ることができる．式 (1)，(2) に代入すると，それぞれ

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)(6n+5)}{16} b_n(-x)^{-3(n+1)/2} + \sum_{n=1}^{\infty} 3na_n(-x)^{-3n/2} = 0$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(6n+1)(6n+5)}{16} a_n(-x)^{-3(n+1)/2} - \sum_{n=1}^{\infty} 3nb_n(-x)^{-3n/2} = 0$$

を得，これらから，$A(x), B(x)$ の漸近展開式 (3) の係数 $\{a_n\}, \{b_n\}$ を決定する漸化式

$$a_1 = -\frac{1\cdot 5}{3\cdot 16} b_0$$

$$a_{n+1} = -\frac{(6n+1)(6n+5)}{3\cdot 16(n+1)} b_n = -\frac{(3n+1/2)(3n+5/2)(3(n-1)+1/2)(3(n-1)+5/2)}{3^2\cdot 16(n+1)n} a_{n-1}$$

$$= -\frac{(3n+5/2)(3n+1/2)(3n-1/2)(3n-5/2)}{3^2\cdot 16(n+1)n} a_{n-1}$$

$$b_1 = \frac{1\cdot 5}{3\cdot 16} a_0$$

$$b_{n+1} = \frac{(6n+1)(6n+5)}{3\cdot 16(n+1)} a_n = -\frac{(3n+1/2)(3n+5/2)(3(n-1)+1/2)(3(n-1)+5/2)}{3^2\cdot 16(n+1)n} b_{n-1}$$

$$= -\frac{(3n+5/2)(3n+1/2)(3n-1/2)(3n-5/2)}{3^2\cdot 16(n+1)n} b_{n-1}$$

を得る．これより，

$$a_{2m} = (-1)^m c_{2m} a_0, \quad a_{2m+1} = (-1)^{m+1} c_{2m+1} b_0$$

$$b_{2m} = (-1)^m c_{2m} b_0, \quad b_{2m+1} = (-1)^m c_{2m+1} a_0$$

$$c_m = \frac{\Gamma(3m+1/2)}{36^m m!\,\Gamma(m+1/2)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$A(x) \sim a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_{2n}}{x^{3n}} + b_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{c_{2n+1}}{x^{3(n+\frac{1}{2})}} \qquad x \to -\infty$$

$$B(x) \sim b_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_{2n}}{x^{3n}} + a_0 \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{c_{2n+1}}{x^{3(n+\frac{1}{2})}} \qquad x \to -\infty$$

これらを式 (3) に代入し，任意に選ぶことができる位相 φ を

$$\varphi = \frac{1}{4}\pi$$

とし，さらに

$$a_0 = 0, \quad b_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$$

と選んだものが，第 1 種エィリー関数

$$Ai(x) = \frac{A(x)}{\sqrt[4]{-x}} \cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3 + \pi/4\right) + \frac{B(x)}{\sqrt[4]{-x}} \sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3 + \pi/4\right)$$

$$A(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{c_{2n+1}}{x^{3(n+\frac{1}{2})}} \qquad x \to -\infty$$

$$B(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{c_{2n}}{x^{3n}} \qquad x \to -\infty$$

$$c_m = \frac{\Gamma(3m+1/2)}{36^m m! \Gamma(m+1/2)} \quad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

であり，また逆に

$$a_0 = \frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad b_0 = 0$$

と選んだものが，第 2 種エィリー関数

$$Bi(x) = \frac{A(x)}{\sqrt[4]{-x}} \cos\left(2\sqrt{(-x)^3}/3 + \pi/4\right) + \frac{B(x)}{\sqrt[4]{-x}} \sin\left(2\sqrt{(-x)^3}/3 + \pi/4\right)$$

$$A(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{c_{2n}}{x^{3n}} \qquad x \to -\infty$$

$$B(x) \sim -\frac{1}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n} \frac{c_{2n+1}}{x^{3(n+\frac{1}{2})}} \qquad x \to -\infty$$

である．こうして 5-6 節 (B-3) を得る（注：(B-3) では $(2/3)z^{3/2}$ のベキで展開している）．

2-8　フロベニウス級数解

$$y(x) = x^{\alpha} \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k, \quad a_0 \neq 0 \tag{2-3-12}$$

を

$$x\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} - a^2 x^{-3} y = 0 \tag{2-4-66}$$

に代入すると，

$$x\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)(\alpha+k-1)x^{\alpha+k-2} + 4\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)x^{\alpha+k-1} - a^2\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{\alpha+k-3} = 0$$

すなわち

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k(\alpha+k)(\alpha+k+3)x^{\alpha+k-1} - a^2\left[a_0 x^{\alpha-3} + a_1 x^{\alpha-2} + \sum_{k=0}^{\infty} a_{k+2} x^{\alpha+k-1}\right] = 0$$

さらに

$$-a^2(a_0 x^{\alpha-3} + a_1 x^{\alpha-2}) + \sum_{k=0}^{\infty}\left[a_k(\alpha+k)(\alpha+k+3) - a^2 a_{k+2}\right] x^{\alpha+k-1} = 0$$

を得る．ゆえに

$$a_0 = a_1 = \cdots = 0$$

2-9　解を $y = \exp(Q(x))$ とおき，もとの微分方程式に代入すると，

$$x^4\left[\frac{d^2Q}{dx^2} + \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]\exp(Q) + x^2\frac{dQ}{dx}\exp(Q) - \exp(Q) = 0$$

となり，共通因子 $\exp(Q)$ で除すと，$Q(x)$ に関する 2 階の微分方程式

$$x^4\left[\frac{d^2Q}{dx^2}+\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2\right]+x^2\frac{dQ}{dx}-1=0 \tag{1}$$

を得る．ここで

$$\frac{d^2Q}{dx^2} \ll \left(\frac{dQ}{dx}\right)^2 \qquad x\to 0 \tag{2-4-3}$$

と仮定する．その結果，

$$x^4\left(\frac{dQ}{dx}\right)^2+x^2\frac{dQ}{dx}\sim 1 \qquad x\to 0$$

と簡略化でき，これから

$$\frac{dQ}{dx}\sim\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2x^2} \qquad x\to 0$$

さらに，

$$Q(x)\sim\frac{1\mp\sqrt{5}}{2x} \qquad x\to 0$$

を得る．$Q(x)$ が仮定 (2-4-3) を満たしていることを確認できる．

主要部を得るために

$$Q(x)=\frac{1\mp\sqrt{5}}{2x}+R(x),\quad \frac{1}{x}\gg R(x) \qquad x\to 0 \tag{2}$$

とおき，(1) に代入すると，

$$x^4\left[\frac{1\mp\sqrt{5}}{x^3}+\frac{d^2R}{dx^2}+\left(\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2x^2}+\frac{dR}{dx}\right)^2\right]+x^2\left[\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2x^2}+\frac{dR}{dx}\right]-1=0 \tag{3}$$

を得る．ここで，(2) の第 2 式を微分することができる

$$-\frac{1}{x^2}\gg R'(x),\quad \frac{2}{x^3}\gg R''(x) \qquad x\to 0 \tag{4}$$

と仮定し，$R(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．これを用いて式 (3) から相殺する項を取り除き，漸近関係 (4) を適用して卓越する項のみを残すと，漸近関係

$$\frac{dR}{dx}\sim\frac{1\mp 1/\sqrt{5}}{x} \qquad x\to 0$$

これから

$$R(x)\sim\left(1\mp 1/\sqrt{5}\right)\log x \qquad x\to 0$$

を得る．$R(x)$ は仮定 (4) を満たしている．

こうして，解の $x\to 0$ における主要部，

$$y(x)\sim x^{1\mp 1/\sqrt{5}}\exp\frac{1\mp\sqrt{5}}{2x} \qquad x\to 0$$

を得る．

さらに精度を上げるために

$$y(x)=x^{1\mp 1/\sqrt{5}}\exp\frac{1\mp\sqrt{5}}{2x}(1+T(x)),\quad 1\gg T(x) \qquad x\to 0$$

とおき，もとの微分方程式に代入し相殺する項を整理すると，

$$x^{3\mp 1/\sqrt{5}}\left[\pm\sqrt{5}T'(x)+(1\mp\sqrt{5})/5\cdot(1+T(x))\right]$$

$$+ x^{4\mp1/\sqrt{5}} 2(5 \mp \sqrt{5})/5 \cdot T'(x) + x^{5\mp1/\sqrt{5}} T''(x) = 0$$

を得る．漸近関係

$$1 \gg T(x) \qquad x \to 0$$

の両辺を微分することが許されると仮定し，

$$1/x \gg T'(x), \quad 1/x^2 \gg T''(x) \qquad x \to 0 \tag{5}$$

$T(x)$ の解を得た後にこれを吟味する．その結果，漸近関係

$$T'(x) \sim (1 \mp 1/\sqrt{5})/5 \qquad x \to 0$$

となり，

$$T(x) \sim (1 \mp 1/\sqrt{5})x/5 \qquad x \to 0$$

を得る．$T(x)$ は仮定 (5) を満たしている．これから二つの独立な解

$$y(x) \sim x^{1-1/\sqrt{5}} \exp \frac{1-\sqrt{5}}{2x} \left[1 + \left(1 - 1/\sqrt{5}\right) x/5\right] \qquad x \to 0$$

および

$$y(x) \sim x^{1+1/\sqrt{5}} \exp \frac{1+\sqrt{5}}{2x} \left[1 + \left(1 + 1/\sqrt{5}\right) x/5\right] \qquad x \to 0$$

を得る．

2-10

(A) $y' \sim xy \gg 1/x^2 \quad \to \quad xy \sim Cx\exp(x^2/2) \ll 1/x^2 \qquad x \to 0$ ：矛盾

(B) $xy \sim -1/x^2 \gg y' \quad \to \quad y \sim -1/x^3 \ll y' \sim 3/x^4 \qquad x \to 0$ ：矛盾

矛盾を生じない組合せは

(C) $y' \sim 1/x^2 \gg xy \quad \to \quad y' \sim 1/x^2 \gg xy \sim -1 \quad x \to 0$

である．

2-11

(*A*) $y' \sim -y/\sqrt{x} \gg 1/x^2 \quad x \to 0+$ より

$y' \sim y/\sqrt{x} \sim Ae^{-2\sqrt{x}}/\sqrt{x} \ll 1/x^2 \qquad x \to 0+$ ：矛盾

(*B*) $y/\sqrt{x} \sim 1/x^2 \gg y' \quad x \to 0+$ より

$y/\sqrt{x} \sim 1/x^2 \ll y' \sim -3/\left(2x^2\sqrt{x}\right) \qquad x \to 0+$ ：矛盾

矛盾が生じない組合せは

(*C*) $y' \sim 1/x^2 \gg y/\sqrt{x} \sim -1/(x\sqrt{x}) \qquad x \to 0+$

である．

2-12 行列 B の特性方程式：$0 = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P|$

$= |A - \lambda I|$ ：行列 A の特性方程式

■ 第3章　(p. 116)

3-1

$$t = -\log\left(\frac{dy}{dt} - y\right) \text{ より，}\quad 1 = -\frac{d^2y/dt^2 - dy/dt}{dy/dt - y},$$

ゆえに

$$\frac{d^2y}{dt^2} - y = 0$$

3-2　数学的帰納法による．

$k = 1$ のとき $y^{(1)}(t) = z(y)$.

$k = n$ で $y^{(n)}(t) = f(z^{(n-1)}(y), z^{(n-2)}(y), \cdots, z(y))$ と表すことができると仮定すると

$$k = n + 1 \text{ で } y^{(n+1)}(t) = z(y)\sum_{j=0}^{n-1}\frac{\partial f}{\partial z^{(j)}}z^{(j+1)}(y)$$

3-3　1次元位相空間（位相線）

微分方程式

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(y(t))$$

の解を表す位相線上の点およびその集合（解曲線）の $t \to +\infty$ の極限における大域的振る舞い（解の安定性）は，次の三つの型に分類できる．

（1）解を表す点が永遠に臨界点に留まる．

（2）解を表す点が $t \to +\infty$ の極限において臨界点に収束する．

（3）解を表す点が $t \to -\infty$ の極限において臨界点に収束する（$t \to +\infty$ の極限において臨界点から遠ざかる）．

一方，臨界点近傍における解曲線（軌跡）の局所的振る舞いは，解曲線の幾何学的形状より名づけられた次の二つの型に分類できる．

（1）節

臨界点近傍の解を表すすべての点が，$t \to \pm\infty$ の極限において臨界点に収束する．

［例］1階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = \mp y$$

の解は

$$y = Ae^{\mp t}$$

であり，$t \to \pm\infty$ の極限において解を表すすべての点は臨界点0に収束する．このうち，$t \to +\infty$ の極限において臨界点0に収束するもの $y = Ae^{-t}$ が**安定な節**であり，臨界点0から遠ざかるもの $y = Ae^{+t}$ が**不安定な節**である（解図 3-3(1),(2)）．

（2）鞍点

$t \to +\infty$ の極限において，臨界点近傍の片側にある解を表す点は臨界点に収束する一方，反対側にある解を表す点は臨界点から遠ざかる．

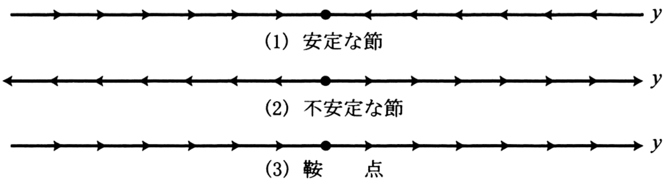
［例］1階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dt} = y^2$$

の解は

$$y = -\frac{1}{t+C}$$

であり，解を表す点は $t \to +\infty$ の極限において y 軸の負の側から臨界点 0 に収束する ($C > 0$)．一方，y 軸の正の側 ($C < 0$) では臨界点 0 から遠ざかる（解図 3-3(3)）．



解図 3-3

3-4　式 (3-3-6a, b) を用いると，

$$\frac{dr}{dt} = \pm((y+z)\cos\theta + (-y+z)\sin\theta) = \pm r,\ \text{ゆえに}\ r(t) = Ar^{\pm t} \quad (A：\text{定数})$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \pm\left(-\frac{\sin\theta}{r}(y+z) + \frac{\cos\theta}{r}(-y+z)\right) = \mp 1\ \text{ゆえに}\ \theta(t) = \mp t + C \quad (C：\text{定数})$$

3-5

$$Y = c_1 Y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 Y_2 \exp(\lambda_2 t) \quad (c_1, c_2：\text{定数}) \tag{3-4-3}$$

を t で微分すると，λ_1, λ_2 は A の固有値であるから，

$$\frac{d}{dt}Y = c_1\lambda_1 Y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2\lambda_2 Y_2 \exp(\lambda_2 t) = c_1 A Y_1 \exp(\lambda_1 t) + c_2 A Y_2 \exp(\lambda_2 t) = AY$$

となり，微分方程式 (3-4-2a) を満足する．ゆえに，独立な積分定数を二つ含む式 (3-4-3) は微分方程式 (3-4-2a) の一般解である．

したがって，行列 $A \equiv \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ の固有値は $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 5$ であり，それぞれに対応する固有ベクトルは $Y_1 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix}$, $Y_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ であるから，その一般解は

$$Y = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \exp(t) + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \exp(5t) \quad (c_1, c_2：\text{定数}) \tag{3-4-3}$$

である．

3-6

$$A \equiv \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

の固有値は $\lambda_1 = \lambda_2 = 3$．固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ のみ．一般解は

$$Y = \left\{C_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} + C_2\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} t\right)\right\} e^{3t} \quad (C_1, C_2：\text{定数})$$

3-7

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}-\frac{dy}{dt}+\frac{1}{z}\frac{dz}{dt}-\frac{dz}{dt}=0 \tag{3-5-12}$$

を積分すると,

$$\log yz-(y+z)=C \quad (C：定数) \tag{3-5-13}$$

すなわち

$$ye^{-y}=Ae^{z}/z \quad (A>0：定数)$$

$y>0$ の領域では, 関数 $u=ye^{-y}$ は $y=1$ で極大 $1/e$ となり (図 3-16c の Q,S), $u(0)=0$ かつ $u\to 0+,(y\to+\infty)$ である. したがって, $1/e>Ae^{z}/z>0$ のすべての z の値に対して対応する y の値が $1>y>0$ と $y>1$ に一つずつ存在する. 一方, 関数 $v=e^{z}/z$ は $z=1$ で極小となり (図 3-16c の P,R), $v\to+\infty$ ($z\to 0+$ および $z\to+\infty$) である. したがって $A<ye^{-y}<1/e$ のすべての y に対応する z の値が $0<z<1$ と $1<z$ に一つずつ存在する. ゆえに式 (3-5-13) は閉曲線を形成する.

3-8 臨界点 4 個

① (0,0) 近傍での線形近似

$$\frac{dy}{dt}\sim 2y, \quad \frac{dz}{dt}\sim 3z$$

$$A=\begin{bmatrix}2&0\\0&3\end{bmatrix}$$

固有値は $\lambda_1=2, \lambda_2=3$ (不安定な節).

一般解は

$$\begin{bmatrix}y\\z\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix}\exp(2t)+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\exp(3t) \quad (c_1,c_2:\ 定数)$$

$$z=Cy^{3/2} \quad (C：定数)$$

② (0,3) 近傍での線形近似 ($z\equiv 3+v$)

$$\frac{dy}{dt}=y(-1-y-v)\sim -y, \quad \frac{dv}{dt}=(3+v)(-2y-v)\sim -6y-3v$$

$$A=\begin{bmatrix}-1&0\\-6&-3\end{bmatrix}$$

固有値は $\lambda_1=-1, \lambda_2=-3$ (安定な節).

一般解は

$$\begin{bmatrix}y\\v\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}\exp(-t)+c_2\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}\exp(-3t) \quad (c_1,c_2：定数)$$

$$z-3=-3y+Cy^3 \quad (C：定数)$$

③ (2,0) 近傍での線形近似 ($y\equiv 2+u$)

$$\frac{du}{dt}=(2+u)(-u-v)\sim -2u-2z, \quad \frac{dz}{dt}=z(-1-2u-z)\sim -z$$

$$A=\begin{bmatrix}-2 & -2\\ 0 & -1\end{bmatrix}$$

固有値は $\lambda_1=-2, \lambda_2=-1$（安定な節）.

一般解は

$$\begin{bmatrix}u\\ z\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ 0\end{bmatrix}\exp(-2t)+c_2\begin{bmatrix}-2\\ 1\end{bmatrix}\exp(-t)\quad (c_1, c_2：定数)$$

$$y-2=-2z+Cz^2\quad (C：定数)$$

④ $(1,1)$ 近傍での線形近似 $(y\equiv 1+u\quad z\equiv 1+v)$

$$\frac{du}{dt}=(1+u)(-u-v)\sim -u-z,\qquad \frac{dv}{dt}=(1+v)(-2u-v)\sim -2u-v$$

$$A=\begin{bmatrix}-1 & -1\\ -2 & -1\end{bmatrix}$$

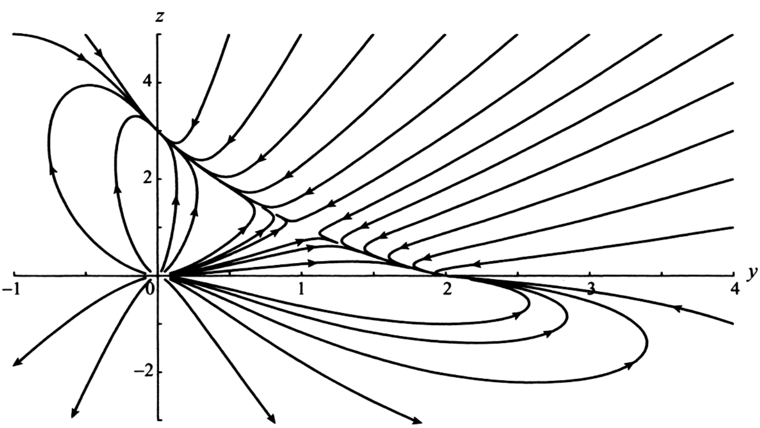
固有値は $\lambda_1=-1+\sqrt{2}, \lambda_2=-1-\sqrt{2}$（鞍点）.

一般解は

$$\begin{bmatrix}u\\ v\end{bmatrix}=c_1\begin{bmatrix}1\\ -\sqrt{2}\end{bmatrix}\exp(-1+\sqrt{2})t+c_2\begin{bmatrix}1\\ \sqrt{2}\end{bmatrix}\exp(-1-\sqrt{2})t\quad (c_1, c_2：定数)$$

$$\left[\sqrt{2}(y-1)+(z-1)\right]^{1+\sqrt{2}}\left[\sqrt{2}(y-1)+(z-1)\right]^{1-\sqrt{2}}=C\quad (C：定数)$$

これらを総合し，解図 3-8 を得る.



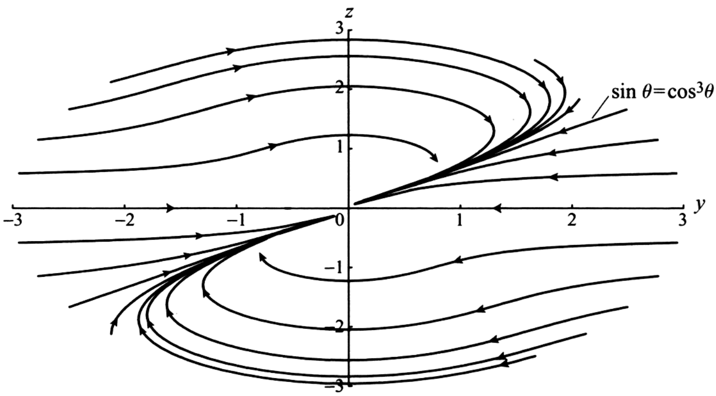
解図 3-8

3-9　臨界点 1 個（原点）：安定な節

$$\frac{dr}{dt}=(-y^3+z^3)\cos\theta-yz^2\sin\theta=-r^3\cos^4\theta\leqq 0$$

$$\frac{d\theta}{dt}=-\frac{\sin\theta}{r}(-y^3+z^3)-yz^2\frac{\cos\theta}{r}=-r^2\sin\theta(\sin\theta-\cos^3\theta)$$

解曲線は $z=0$ および $\sin\theta=\cos^3\theta$ を満たす動径 $(\theta\fallingdotseq 0.6)$ に沿って原点に収束する（解図 3-9）.



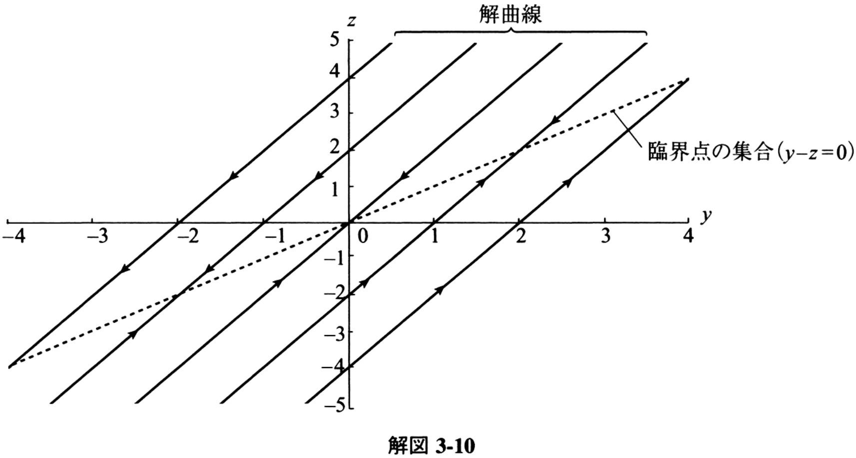
解図 3-9

3-10 係数行列 $\begin{bmatrix} 1, & -1 \\ 2, & -2 \end{bmatrix}$ は特異行列であり，固有値 $\lambda_1 = 0$ をもち，その固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ である．もう一つの固有値は $\lambda_2 = -1$ であり，その固有ベクトルは $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ である．それゆえ，連立微分方程式の一般解は，

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} e^{-t} \quad (c_1, c_2 : \text{定数}) \tag{1}$$

であるゆえ，原点を通り固有値 $\lambda_1 = 0$ の固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ 方向の直線 $z = y$ 上の点はすべて臨界点(安定な節)である．解 (1) から t を消去すると，解曲線

$$z = 2(y - c_1) + c_1$$



解図 3-10

すなわち，臨界点 (c_1, c_1) を通る，固有値 $\lambda_2 = -1$ の固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ 方向の直線を得る．

■ 第 4 章（p. 139）

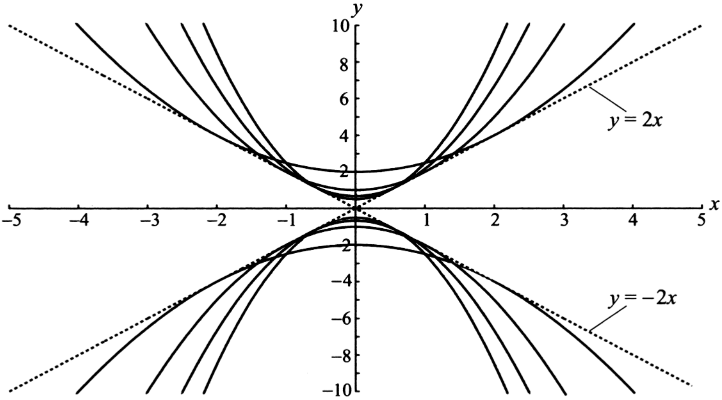
4-1　[A]　微分方程式　$4x - 2y\dfrac{dy}{dx} + x\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

一般解　$y = cx^2 + 1/c$　（実線）

p-判別式曲線　$y = \pm 2x$

c-判別式曲線　$y = \pm 2x$

特異解　$y = \pm 2x$　（点線）



解図 4-1(A)

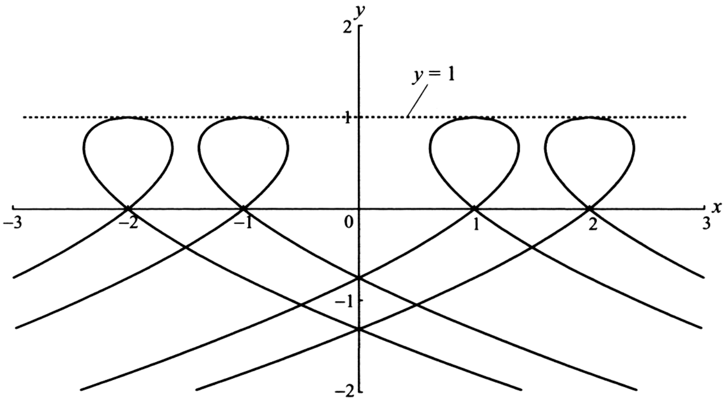
[B]　微分方程式　$4(1-y) - (2-3y)^2\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 = 0$

一般解　$y^2 - y^3 = (x-c)^2$　（実線）

p-判別式曲線　$y = 1$

c-判別式曲線　$y = 1,\quad y = 0$

特異解　$y = 1$　（点線），なお $y = 0$ は節の集合である．



解図 4-1(B)

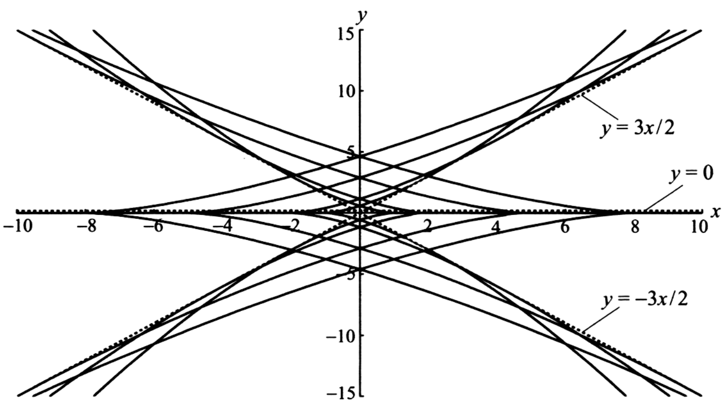
[C]　微分方程式　$8\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 x - y\left(12\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - 9\right) = 0$

一般解　$3cy^2 = (x+c)^3$　（実線）

p-判別式曲線　$y = 0,\quad y = \pm 3x/2$

c-判別式曲線　$y = \pm 3x/2$

特異解　$y = 0,\quad y = \pm 3x/2$　（点線），なお $y = 0$ は尖点曲線である．



解図 4-1(C)

4-2　［包絡線］

微分方程式 (1-7-10) を代数方程式 (4-2-3) の形になおすと

$$F(x, y, p) = y - p^2 = 0$$

となるゆえ，特異点 $(x_0, 0)$ を通る p-判別式曲線は，直線

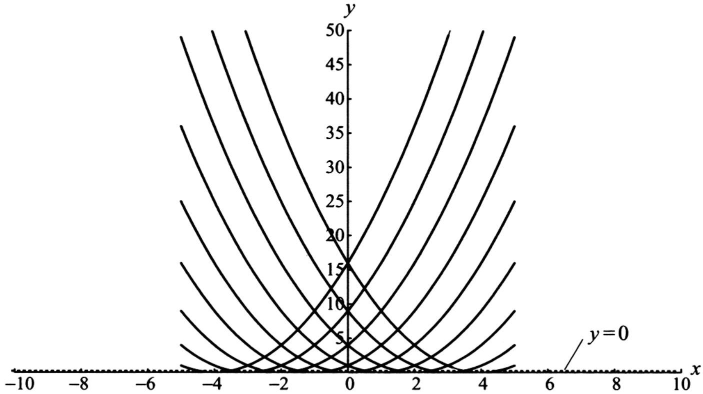
$$y = 0$$

であるが，この例題の場合，この p-判別式曲線は連続する解曲線

$$y = (-x + C)^2/4 \quad (C：定数) \tag{1-7-11}$$

に共通の接線，すなわち解曲線の包絡線である．包絡線はそのすべての点で一般解の勾配に一致するので，存在一意性特異点の集合であり，それ自身微分方程式の解である．

つまり，連続する解曲線に包絡線が存在するとき，それは p-判別式曲線であり，かつ存在一意性特異点を連ねた解曲線すなわち特異解である（解図 4-2）．



解図 4-2

■ 第 5 章（p. 166）

5-1　微分方程式 $xy' = y + \sqrt{x^2 + y^2}$ は

$$y' = y/x + \sqrt{1 + (y/x)^2} \quad (x > 0), \qquad y' = y/x - \sqrt{1 + (y/x)^2} \quad (x < 0)$$

すなわち同次式である．そこで

$$v = y/x$$

とおくと

$$|x|v' = \sqrt{1 + v^2}$$

すなわち

$$\frac{dv}{\sqrt{1 + v^2}} = \frac{dx}{|x|}$$

（変数分離型）を得る．変数変換 $v = \tan\theta$, $\left(-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$ を施すと

$$\log\left|\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| = \pm\log|x| + C \quad (C：定数)$$

を得る．ただし対数関数の前の複合は x の符号に一致する．したがって，

$$\tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = Ax \quad (x > 0), \qquad \tan\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{B}{x} \quad (x < 0) \quad (A > 0,\ B < 0：定数)$$

$$v = y/x = \tan\theta = \frac{A^2x^2-1}{2Ax} \quad (x>0) \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{Ax^2}{2} - \frac{1}{2A} \quad (x>0)$$

$$v = y/x = \tan\theta = \frac{B^2-x^2}{2Bx} \quad (x<0) \quad \text{すなわち} \quad y = -\frac{x^2}{2B} + \frac{B}{2} \quad (x<0)$$

$B = -1/A$ で両者は一致する．初期条件 $(x, y) = (0, -1)$ を満たす解は

$$y = x^2/4 - 1$$

5-2 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ に関して，ある自然数 N より大きいすべての n について，

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < s < 1 \tag{5-2-3}$$

が成立するならば，

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} |a_k| < |a_{N+1}|(1 + s + s^2 + \cdots) = \frac{|a_{N+1}|}{1-s}$$

となるので $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束する．特に，

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < s < 1 \tag{5-2-4}$$

ならば，$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ は絶対収束する．

ゆえに，ベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_1)^k$ において，ある自然数 N より大きいすべての k について，

$$\left|\frac{c_{k+1}(z-z_1)}{c_k}\right| < \varepsilon < 1$$

が成立するならば $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_1)^k$ は絶対収束する．特に，

$$\lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_{k+1}(z-z_1)}{c_k}\right| < s < 1 \quad \text{すなわち} \quad |z-z_1| < \lim_{k\to\infty}\left|\frac{c_k}{c_{k+1}}\right|$$

ならば，$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_1)^k$ は絶対収束する．したがって，通常点 z_0 まわりのベキ級数 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k(z-z_1)^k$ の収束半径 R は

$$\frac{1}{R} = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}\right| \tag{5-2-5}$$

5-3

$$\frac{dy}{dx} = y \ (x \geq 0), \quad \frac{dy}{dx} = -y \ (x < 0), \quad x = 0,\ y = 1$$

の解は

$$y = e^x \ (x \geq 0), \quad y = e^{-x} \ (x < 0) \quad （連続関数）$$

である．

5-4

$$\frac{dy}{dx} = 2\sqrt{|y|}, \quad x = 0, \quad y = 0$$

の解は

$$y = 0 \quad \text{および}$$

$$y = x^2 \ (x \geq 0), \quad y = -x^2 \ (x < 0)$$

である.

参考文献

漸近解析

[1] A. Erdelyi, *Asymptotic expansions* , Dover Publications, NY, 1956.

[2] Carl M.Bender, Steven A.Orszag, *Advanced mathematical methods for scientists and engineers*, McGraw-Hill, 1978.

[3] J.D. Cole, *Perturbation methods in applied mathematics,* , Blaisdell, 1968.

[4] Ali Hasan Nayfeh , *Perturbation methods*, John Wiley & Sons, NY, 1973.

[5] 柴田正和 「漸近級数と特異摂動法」森北出版, 2009.

常微分方程式論

[6] E.L. Ince, *Ordinary differential equations* , Dover Publications, NY, 1956.

[7] E. Coddinngton, N. Levinson, *Theory of ordinary differential equations* , McGraw-Hill, 1955.

[8] G. Carrier, C. Pearson, *Ordinary differential equations* , Blaisdell, 1968.

[9] F. Murrays, K Miller, *Existence theorems for ordinary differential equations* , The New York University Press, 1954.

[10] 吉田耕作「常微分方程式の解法」岩波書店, 1954.

[11] 福原滿州雄 「常微分方程式 第 2 版」 岩波全書, 1980.

[12] 一松信 「微分方程式と解法」 教育出版, 1976.

[13] ポントリャーギン著, 千葉克裕訳 「常微分方程式」共立出版, 1963.

[14] E. クライツィグ著, 北原和夫訳「技術者のための高等数学 5　常微分方程式」培風館, 1987.

関数表・公式集

[15] Milton Abramowitz, Irene A. Stegun (Ed.), *Handbook of mathematical functions*, Dover Publications, NY, 1965.

[16] 森口・宇田川・一松「数学公式 III 特殊関数」岩波書店, 1960.

[17] G.N. Watson, *A treatise on the theory of Bessel functions,*, Cambridge University Press, 1966

解析学・複素関数論

[18] 高木貞治「解析概論」岩波書店, 1961.

[19] P. Henrici, *Applied and computational complex analysis*, Wiley, 1986.

[20] E. クライツィグ著, 丹生慶四郎訳「技術者のための高等数学 4　複素関数論」培風館, 2003.

線形代数

［21］ R. Bellman, *Introduction to matrix analysis* , McGraw-Hill, 1964.

［22］ D.C. Lay, *Linear algebra and its applications*, Addison Wesley, 2005.

［23］ 佐武一郎 「行列と行列式」 裳華房, 1957.

あとがき

解析学・線形代数・複素関数論・微分方程式の基礎を履修しおえた学部後期の学生諸君を念頭に微分方程式の漸近解析を一通り紹介する，という著者の目標は，前著「漸近級数と特異摂動法」ならびに本書を上梓することによりひとまず達成できた．

微分方程式の漸近解析のうち，特異摂動法全般の習得を目指す読者は，前著第2章および第4章～第6章を，また摂動論の初歩から学習したい読者はこれらに加えて第1章から読み進んでいただきたい．その際，頻繁に登場する特殊関数の漸近的な振る舞いの導出法を詳しく学びたい読者は，本書第2章を参照されたい．また，統計物理学ほかに用いる物理数学としての漸近解析を学習したい読者は，前著第2章および第3章を，水の表面波に関する特異摂動法に興味のある読者は，前著第2章および第7章のみを読むだけで，それぞれの目的を達することができるだろう．

微分方程式の特異点ないし臨界点の解析を行うことのみにより，その解の大局的性質を明らかにすることができる，という初学者の意表をつく局所漸近解析に興味をもつ読者は，本書，特に第3章を，さらに基礎を詳しく学習したい場合には前著第2章も読まれることをすすめる．さらに本書では，パンルヴェ超越関数のように無数の特異点を有する関数の数値計算(1-6，5-4節)，および特異解のミニ百科(第4章)まで収めることにより，特異点・臨界点に関する一般的な知見をほぼ網羅できたものと信ずる．第5章は本論に関する比較的長い注釈と関連する公式を集めたものである．一方，より短い注釈というべきものは演習問題の一部に取り入れられており，本論を一読された読者が抱くであろう諸質問にあらかじめ解答する意味もこめている．

あるノーベル賞物理学者の「素人でも理解できるようにやさしく説明できない者は専門家の資格はない」という戒めを座右の銘としてきた著者としては，これら二冊の作品が読者に「わかりやすい」と受けいれていただけるならばそれ以上の喜びはない．

著　者

索　　引

著 者 略 歴

柴田　正和（しばた・まさかず）

1949 年　横浜市に生まれる
1967 年　私立麻布高校卒業
1971 年　東京大学理学部物理学科卒業
1987 年　マサチューセッツ工科大学　Ph.D（流体力学）
1989 年　㈲応用数理解析 代表取締役
2003 年　戸塚理数塾 設立
　　　　現在に至る

【著書】

「漸近級数と特異摂動法」森北出版，2009.

常微分方程式の局所漸近解析

2010 年 8 月 10 日　第 1 版第 1 刷発行

著　　者　柴田正和

発 行 者　森北博巳

発 行 所　**森北出版株式会社**

東京都千代田区富士見 1-4-11（〒 102-0071）
電話 03-3265-8341 ／ FAX 03-3264-8709
http://www.morikita.co.jp/
日本書籍出版協会・自然科学書協会・工学書協会　会員
JCOPY ＜(社)出版者著作権管理機構 委託出版物＞

落丁・乱丁本はお取替えいたします　　印刷 / モリモト印刷・製本 / 協栄製本

Printed in Japan ／ ISBN978-4-627-07651-8